李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

那些让你加快解题速度的高中数学公式-13

利用平面向量快速求三角形面积（1）

作者：本质教育 韦卓甫

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。由于平面向量兼具有代数形式和几何形式的双重身份，是目前高考的重点、热点。接下来的几周小编将为大家介绍 3 种使用平面向量求解三角形面积的方法。

定理 13：在 ΔABC中，若已知$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

接下来我们来证明一下这个公式：

$$由\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)，\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$\because 0<A<\pi\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$\therefore\sin A=\sqrt{1-(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}})^2}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$又\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin A$$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

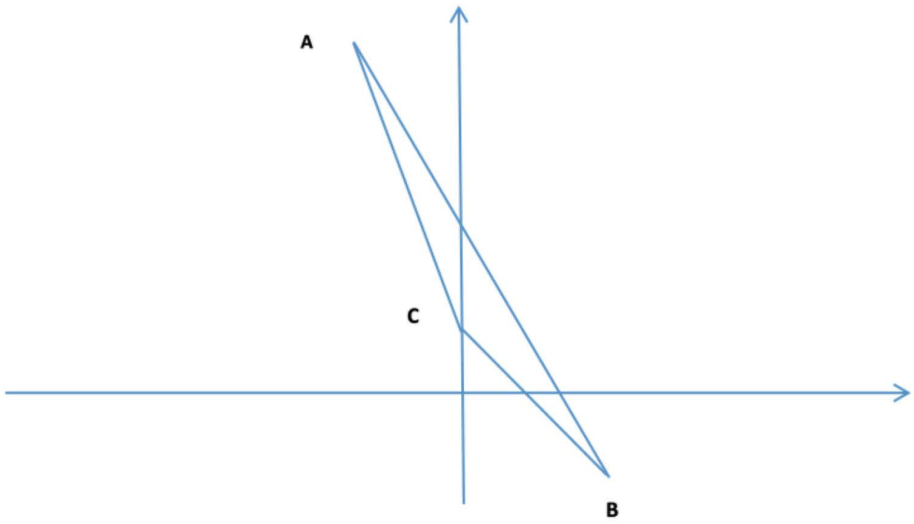
请大家记住，这个公式的适用范围是我们已知三角形的两边向量，那么在做题的时候需要大家灵活的建立坐标系。

如果大家记住了上面这个公式，我们一起来看一道可以秒解的例题.

例.（2016.山西）已知 A $\left(x,\sqrt{10^{\lg 100}}\right)$ 且 A 点的横坐标为纵坐标的 $-\frac{1}{2}$ 倍，且 B（3，-3），点 C 为二次函数 $y=ax^2-3x+2$ 与 Y 轴的交点，求 ΔABC 的面积.

分析：首先我们使用本质教育第一招翻译，得出 ABC 的坐标

A（-5,10），B（3，-3），C（0,2）由于直接使用底乘高的基础公式较难求解



盯住目标，联想到上述公式，我们设 $\overrightarrow{AB}=(8,-13),\overrightarrow{AC}=(5,-8)$

得到 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|8\times(-8)-(-13)\times 5\right|=\frac{1}{2}$

复习一下：在 ΔABC 中，若已知 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$ ，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$

这个利用平面向量求三角形面积的公式能够加快我们的解题速度！大家记住了吗？

同时，小编为大家总结了高中阶段所有常用的三角形面积公式

1.已知三角形底 a,高 h,则 S = ah/2

2.（海伦公式）已知三角形三边 a,b,c,则 p=(a+b+c)/2

S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

3. 已知三角形两边 a,b,这两边夹角 C,

则 S = $\frac{1}{2}ab\sin c=2R^2\sin A\sin B\sin C=a^2\frac{\sin B\sin C}{2\sin A}$

注:其中 R 为外切圆半径.

4.已知三角形三边分别为 a、b、c,内切圆半径为 r

则 S=$\frac{(a+b+c)r}{2}$

5.已知三角形三边分别为 a、b、c,外接圆半径为 R

则 S=$\frac{abc}{4R}$

记住了吗？

本质教育版

那些让你加快解题速度的高中数学公式-18

平面向量中的一些重要定理

作者：本质教育 韦卓甫

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

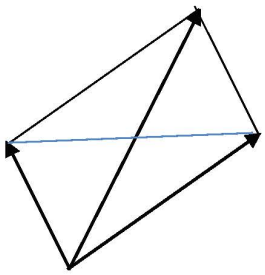
那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题

速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。由于平面向量兼具有代数形式和几何形式的双重身份，是目前高考的重点、热点。小编将为大家介绍平面向量题目中的一些重要定理。

定理 18：

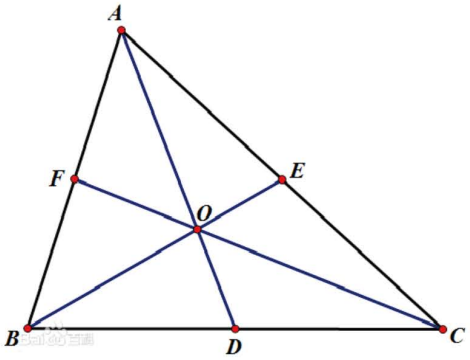
（1）如果 D 是 ΔABC 的边 BC 的中点，那么有 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



如图所示，在平行四边形 ABCE 中，D 为 BC 的中点且为 AE 的中点（平行四边形性质）

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$$

（2）我们将（1）延伸：若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则有O为$\Delta ABC$的重心（三角形三边中线的交点），反之亦然



证明：设BC的中点为D，由中点向量表达式得

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$ 且由已知得$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}$

$\therefore \overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$, 且$AO//OD \therefore AOD$三点共线（$O$在$AD$中线上）

同理可得O也在另外两条边的中线上，因此O为三角形的重心

如果大家记住了上面这个公式，我们一起来看1道可以秒解的例题.

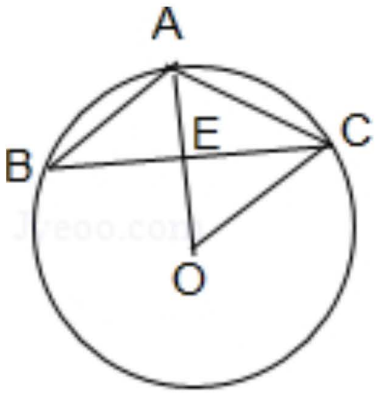
例1.（2018秋•仓山区校级期末）若△ABC外接圆圆心为O，半径为4，且$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$的值为（　　）

A．14　　B．$2\sqrt{7}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．2

【分析】首先，我们设 E 为 BC 的中点，此时我们需要化简$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，这个时候联想上述的（1）公式

得到：$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$得$\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{AE}=\vec{0}$，得$\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AE}$，

接下来使用本质教育第一招—翻译，将图像画出来



$\because AO=4$，$\therefore AE=1$，$OE=3$，

在直角三角形 OEC 中可得 $CE=\sqrt{7}$，

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACE=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\frac{|\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{CA}|}=|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CE}|=2|\overrightarrow{CE}|^2=2\times7=14.$

故选：A.

复习一下：

（1）如果 D 是 ΔABC 的边 BC 的中点，那么有 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

（2）我们将（1）延伸：若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则有 O 为 ΔABC 的重心（三角形三边中线的交点），反之亦然

这 2 个关于平面向量的公式能够加快我们的解题速度！大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-21

利用“极化恒等式”加快解向量题的速度

作者：本质教育 魏旭东

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

本质教育版权所有

2

解题公式

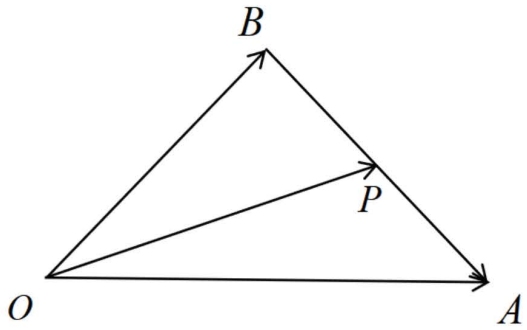
极化恒等式：

若向量$\vec{OA},\vec{OB}$不共线，且点P为线段AB的中点，则

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OP}|^2-\left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2$$

本质教育版权

记忆窍门：



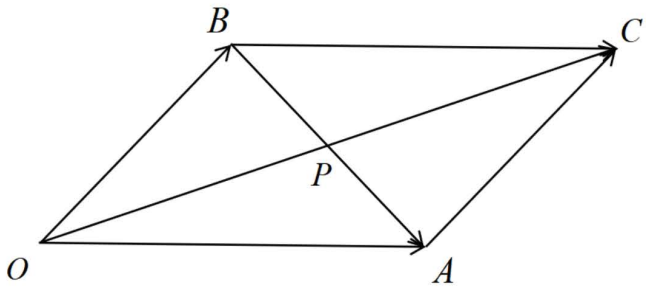
以向量$\vec{OA},\vec{OB}$为邻边构建一个三角形，点P为线段AB的中点，那么$\vec{OA},\vec{OB}$的数量积就等于AB边上的中线长度的平方减去AB长度一半的平方。

简记：向量积等于第三边的中线长的平方减去第三边长一半的平方。

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些在选择和填空题中有关向量的点积和模的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

本质教育版权所有

我们先**证明**一下这个公式：



以$\vec{OA},\vec{OB}$为邻边构建平行四边形，那么AB的中点P也是两条对角线的交点

$$|\vec{OC}|^2=\vec{OC}^2=\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)^2=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}$$

$$|\vec{BA}|^2=\vec{BA}^2=\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)^2=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}$$

显然，两式相减，得：

$$\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)^2-\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)^2$$

$$=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}-(|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB})$$

化简：

$(2\vec{OP})^2-\left(\vec{BA}\right)^2=4\vec{OA}\cdot\vec{OB}$

$4\vec{OA}\cdot\vec{OB}=4|\vec{OP}|^2-|\vec{AB}|^2$

则$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OP}|^2-\left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2$

3

实战演示

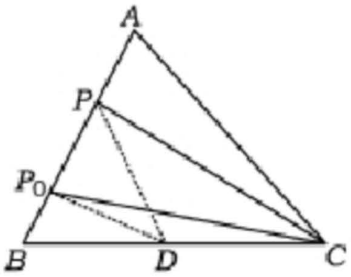
接下来，我们用 1 道高考题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例：

（2013•浙江）设△ABC，P_0是边 AB 上一定点，满足$P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有$\vec{PB}\cdot\vec{PC}\geq\vec{P_0B}\cdot\vec{P_0C}$则（　　）

A．$\angle ABC=90^\circ$　B．$\angle BAC=90^\circ$　C．$AB=AC$　D．$AC=BC$

第一步，利用本质教育第一招翻译：将文字翻译成图形：



再将眼光集中于题目上最关键的 已知$\vec{PB}\cdot\vec{PC}\geq\vec{P_0B}\cdot\vec{P_0C}$，

看到向量的数量积，那么在不知道这个公式的条件下，就需要利用其他的方法来化简或者翻译了，感兴趣的同学可以找到这张试卷的标准答案来对比一下，挺繁琐的。（甚至很多同学被这个题难倒了）

那么在有这个公式储备的条件下，（极化恒等式也是某些高考题的出题背景）

我们尝试着用极化恒等式去化简一下已知，

记D为BC中点，那么由极化恒等式，

已知式子可以写成：

$|\vec{PD}|^2-|\vec{BD}|^2\geq|\vec{P_0D}|^2-|\vec{BD}|^2$，

那么又因为向量的模都是非负数，

故：$|\vec{PD}|\geq|\vec{P_0D}|$,

再回到这个三角形里面，$|\vec{PD}|\geq|\vec{P_0D}|$是不是意味着$P_0D$是 变化的$PD$能取到的最短长度，

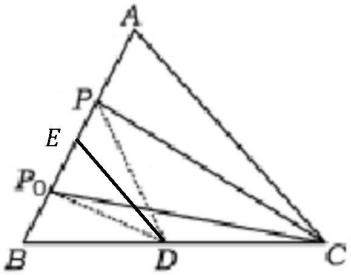
则显然$P_0D\perp AB$（这个条件显然和我们的目标有一些关联）

本质教育版权所有

我们的目标是判断哪个选项是正确的，是找直角或者找两相等边（这个等边也可以从等角中推得）

有D点是中点，那我们试着找另一个中点尝试下中位线。

D是BC中点，我们尝试找AB中点试试



记E为AB中点，则$ED \parallel AC$，且$ED = \frac{1}{2}AC$

题目里还有一个已知：$P_0B = \frac{1}{4}AB$

那么P_0也是BE中点，因为$P_0D \perp AB$，由三线合一，

那么$ED = BD = \frac{1}{2}BC$，则$AC = BC$

故选D.

【直接记住结论解题】

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

公式 21：

极化恒等式：

若向量$\vec{OA},\vec{OB}$不共线，且点P为线段AB的中点，则

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=|\vec{OP}|^2-\left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2$$

大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-24

利用平面向量中三点共线定理快速解题

作者：本质教育 王馨逸

1

简单的题目

做得又快又对

本质教育版权所有

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

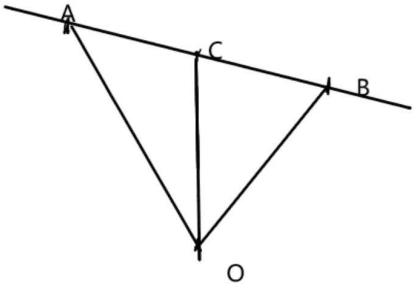
因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

2

解题公式

定理 24：

在平面中，A，B，C 三点共线的充要条件是：$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（O 为平面上任意一点），其中 $x+y=1$。（如图所示）



通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些在选择和填空题中有关三点共线的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式：

先证明充分条件：

若 A、B、C 在一条直线上且 O 在直线外

$\therefore \overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$

又$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

整理可得$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\therefore x=1-t, y=t$ 即 $x+y=1$

证明必要条件：

$\because\ x+y=1$

$\therefore y=1-x$

又$\because \overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OB}$

$=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}$

$=x\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{BA}$ 即 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{BA}$

$\therefore$C,A,B 三点共线

(推论：若 A、B、C 在一条直线上且 O 在直线外且 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$)

推论的证明在证充分条件中得到体现

本质教育版权所有

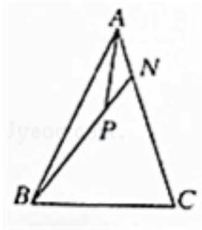
3

实战演示

接下来，我们用两道例题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例 1：

（2019•郑州一模）如图，在△ABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上一点，若 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则实数 t 的值为（　　）



A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{3}{4}$

【直接记住结论解题】

用数学三招第三招盯住目标 :我们的目标是求$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$的中 t 的值 ,且 B,P,N 三点共线，所以我们联想有关的定理

本质教育版权所有

三点共线定理 :在平面中 ,A ,B ,C 三点共线的充要条件是 : $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

（O 为平面上任意一点），其中 $x+y=0$。

$\because \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ 且 $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}$

$\therefore \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN})$ 即 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AN}$

又∵将 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AN}$ 带入 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AN}$

又∵P，B，N 三点共线

∴根据三点共线定理可得 $t+\frac{5}{6}=1$ 即 $t=\frac{1}{6}$

故答案选 C。

例 2：

（2019•郴州二模）在△ABC 中，$\angle BAC=60°$，$AB=3$，$AC=4$，点 M 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ 等于（　　）

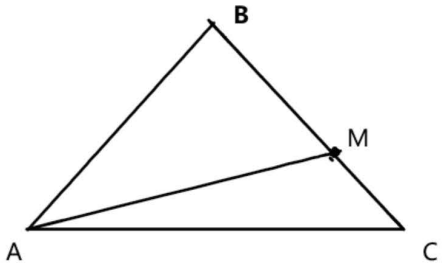
A．7　　B．8　　C．9　　D．10

【直接记住结论解题】

解：先用数学三招第一招翻译：

画出图形

本质教育版权所有



再用数学三招第三招盯住目标：我们的目标是求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$的值

∵B，M，C三点共线且$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，

∴我们联想有关的定理，联想到

三点共线定理：在平面中A，B，C三点共线的充要条件是：$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

（O为平面上任意一点），其中$x+y=0$

（推论：若A、B、C在一条直线上且O在直线外且$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$）

∵$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}$

∴$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

根据推论可得$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

我们的目标转化为求$\overrightarrow{AB}\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})$的值

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3+\frac{2}{3}\times3\times4\times\frac{1}{2}=7.$

故选：A.

本质教育版权所有

上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论并熟悉它的证明过程，几乎是秒杀有关三点共线的题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

定理 24：在平面中，A，B，C 三点共线的充要条件是：$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（O 为平面上任意一点），其中 $x+y=1$。

，大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-25

利用矩形向量公式加快解题速度

作者：本质教育 魏旭东

1

简单的题目
做得又快又对

本质教育版权所有

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，今天我们讲一个矩形的特殊性质。（**文章尾部附有往期文章链接**）

2

解题公式

公式 25：

已知矩形$ABCD$，O为平面内任意一点，则：

$$|\vec{OA}|^2+|\vec{OC}|^2=|\vec{OB}|^2+|\vec{OD}|^2$$

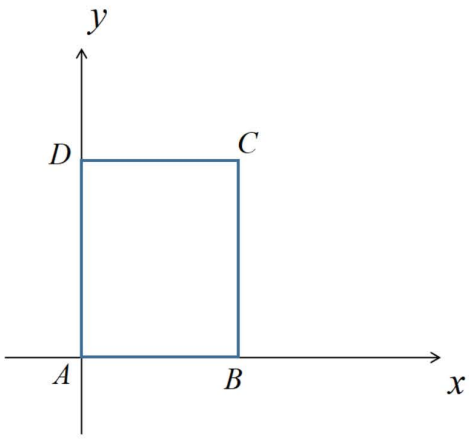
记忆窍门：

两组对角顶点到任意一点的距离的平方和相等

通过这一简单的结论,我们可以秒杀一些在选择和填空题中有关向量模长的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

本质教育版权所有

我们先**证明**一下这个公式：



如图，四边形$ABCD$为矩形，设$|\vec{AB}|=a$，$|\vec{AD}|=b$，

则$A(0,0),B(a,0),C(a,b),D(0,b)$

设平面内任意一点$O(m,n)$，则

$|\vec{OA}|^2+|\vec{OC}|^2=m^2+n^2+(m-a)^2+(n-b)^2$

$|\vec{OB}|^2+|\vec{OD}|^2=(m-a)^2+n^2+m^2+(n-b)^2$

则显然，$|\vec{OA}|^2+|\vec{OC}|^2=|\vec{OB}|^2+|\vec{OD}|^2$

（其实从证明公式中我们可以发现，这个公式很多时候可以直接避免掉繁琐的坐标运算，对于变化的向量有奇效）

本质教育版权所有

3

实战演示

接下来，我们用 1 道高考题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例：

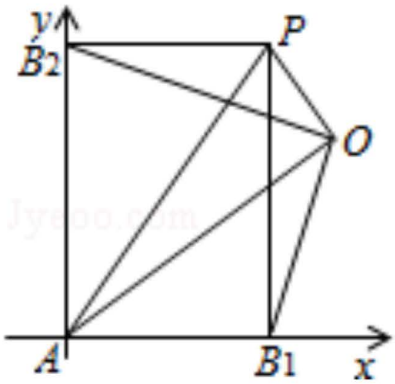
（2013•重庆）在平面上，$\vec{AB_1}\perp\vec{AB_2}$，$|\vec{OB_1}|=|\vec{OB_2}|=1$，$\vec{AP}=\vec{AB_1}+\vec{AB_2}$．若$|\vec{OP}|<\frac{1}{2}$，则$|\vec{OA}|$的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B．$(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}]$　　C．$(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　D．$(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$

（2013 年重庆理科卷的选择题最后一题）

分析：

第一步，显然我们利用本质教育第一招翻译成几何语言：



在没有这个公式储备的情况下，

这个题是不是就需要进一步的翻译和化简题目中的已知条件，

然后再利用盯住目标与已知结合去解题，稍显繁琐。

标准答案的解题如下：

设$O(x,y)$

由$|\vec{OB_1}|=|\vec{OB_2}|=1$，得$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=1\\x^2+(y-b)^2=1\end{cases}$，则$\begin{cases}(x-a)^2=1-y^2\\(y-b)^2=1-x^2\end{cases}$

$\because|\vec{OP}|<\frac{1}{2}$，$\therefore(x-a)^2+(y-b)^2<\frac{1}{4}$

$\therefore 1-x^2+1-y^2<\frac{1}{4}$

$\therefore x^2+y^2>\frac{7}{4}$①

$\because$（$x-a$）$^2+y^2=1$，$\therefore y^2=1-$（$x-a$）$^2\leqslant 1$，

$\therefore y^2\leqslant 1$

同理$x^2\leqslant 1$

$\therefore x^2+y^2\leqslant 2$②

由①②知$\frac{7}{4}<x^2+y^2\leq 2$，

$\because|\vec{OA}|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore\frac{\sqrt{7}}{2}<|\vec{OA}|\leq\sqrt{2}$

故选：D.

但是如果有公式储备的条件下其实我们只需要一步就能求出答案

由公式 25，

矩形AB_1PB_2，和平面内一点O

$|\vec{OA}|^2+|\vec{OP}|^2=|\vec{OB_1}|^2+|\vec{OB_2}|^2$

又因为$|\vec{OB_1}|=|\vec{OB_2}|=1$，

则$|\vec{OA}|^2+|\vec{OP}|^2=2$

而$|\vec{OP}|<\frac{1}{2}$，则$0\le|\vec{OP}|^2<\frac{1}{4}$，

则显然$\frac{7}{4}<|\vec{OA}|^2\le 2$，

故选D

【直接记住结论解题】

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

公式 25：

已知矩形$ABCD$，O为平面内任意一点，则：

$|\vec{OA}|^2+|\vec{OC}|^2=|\vec{OB}|^2+|\vec{OD}|^2$

本质教育版权所有

大家记住了吗？

欢迎添加泽宇老师本人微信参加 2 小时的互动直播试听课（免费，有效到这个连载结束为止）

微信号：ZGSX02

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-29

利用“奔驰定理”加快解决向量结合三角形题目的速度

作者：本质教育 魏旭东

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，今天我们讲一个奔驰定理“”。（**文章尾部附有往期文章链接**）

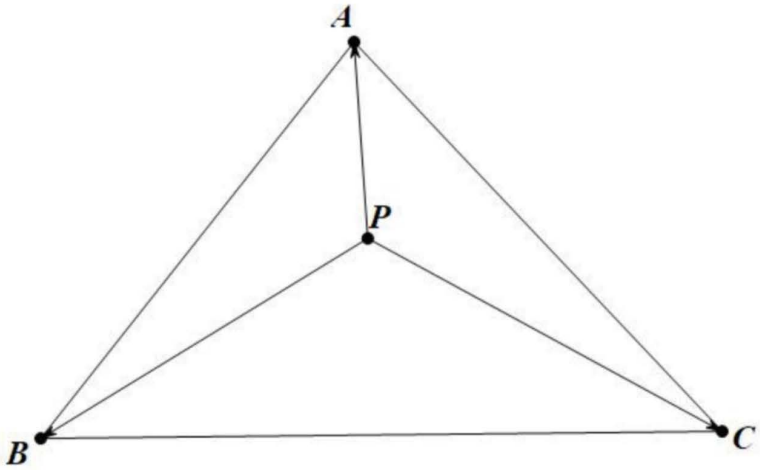
本质教育版权所有

2

解题公式

公式 29：

“奔驰定理”



对于ΔABC内一点P，恒有：

$$S_{\Delta PBC}\cdot\vec{PA}+S_{\Delta PAC}\cdot\vec{PB}+S_{\Delta PAB}\cdot\vec{PC}=0$$

记忆窍门：

这个定理的网络名称据说就是来源于 benz 品牌的车标

非常好记忆：

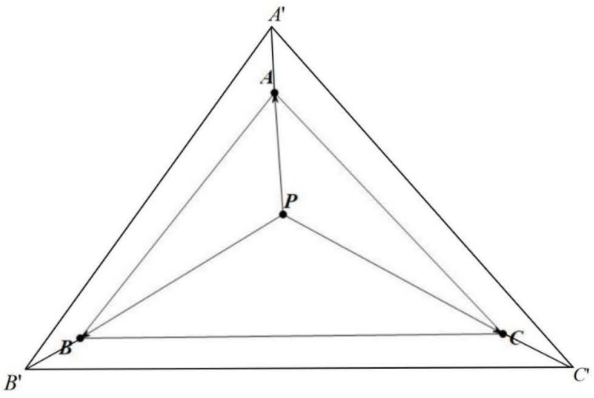
三角形内一点与三个顶点的连线将三角形分割成 3 个部分，

三个部分的面积与每个部分反方向的向量乘积之和为 0

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些关于向量和三角形面积（有心的同学可以思考一下变式）的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

本质教育版权所有

我们先**证明**一下这个公式：



如图，

P为ΔABC内一点，

如果我们将PA、PB、PC向外延长，得到PA'、PB'、PC'，令

$\vec{PA'}+\vec{PB'}+\vec{PC'}=0$，那么有$P$为$\Delta A'B'C'$的重心

不妨设$\vec{PA'}=x\vec{PA}$，$\vec{PB'}=y\vec{PB}$，$\vec{PC'}=z\vec{PC}$

则$x\vec{PA}+y\vec{PB}+z\vec{PC}=0$

并且，$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}\left|\vec{PB}\right|\cdot\left|\vec{PC}\right|\cdot sin\angle BPC=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{PB'}\right|}{y}\cdot\frac{\left|\vec{PC'}\right|}{z}\cdot sin\angle B'PC'$

$=\frac{S_{\Delta PB'C'}}{yz}=\frac{x\cdot S_{\Delta PB'C'}}{xyz}$

同理可得：$S_{\Delta PAC}=\frac{y\cdot S_{\Delta PA'C'}}{xyz}$，$S_{\Delta PAB}=\frac{z\cdot S_{\Delta PA'B'}}{xyz}$

因为三角形的重心和三个顶点组成的 3 个三角形面积相等

所以：$S_{\Delta PA'C'}=S_{\Delta PA'B'}=S_{\Delta PB'C'}$

则$x:y:z=S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}$

则$S_{\Delta PBC}\cdot\vec{PA}+S_{\Delta PAC}\cdot\vec{PB}+S_{\Delta PAB}\cdot\vec{PC}=0$

得证

（其实从证明过程我们也可以发现，二级结论之所以为二级结论，就是很多时候它能帮助我们减少考试时遇到这类题目想办法去证明二级结论的时间，也就是省略了利用重心来推出其他结论的过程，从而加快解题速度）

教育版权所有

3

实战演示

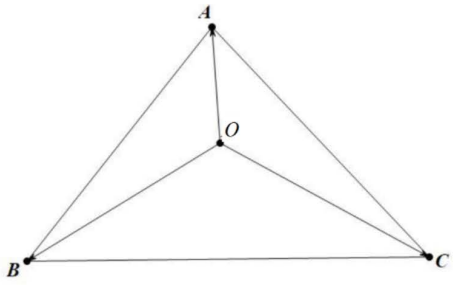
接下来，我们用 1 道 2016 年清华自主招生题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例：

（2016 清华自招）若O为ΔABC内一点，满足$S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}=4:3:2$，设$\vec{AO}=\lambda\vec{AB}+\mu\vec{AC}$，则$\lambda+\mu=$_____.

分析：

第一步，显然我们利用本质教育第一招翻译成几何语言：



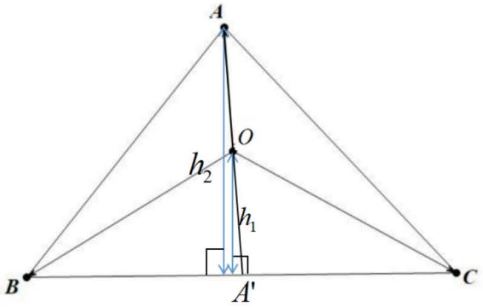
在不知道奔驰定理的情况下，那么这个题的处理就显得很复杂了，有一种思路是再利用我们刚才证明过程中证明过的东西来写这个题，肯定是比较繁琐的。

本质教育版权所有

这里写一下标准答案和下面的公式解题进行对比：

因为$S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}=4:3:2$，则$\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

我们可以将面积面转化为高之比，延长AO交BC于A'



则$\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{3}=\frac{OA'}{AA'}$，故$OA'=\frac{1}{3}AA'$，$OA=\frac{2}{3}AA'$

$\because \vec{AO}=\lambda\vec{AB}+\mu\vec{AC}$，

$\therefore \frac{2}{3}\vec{AA'}=\frac{2}{3}(\vec{AB}+\vec{BA'})=\lambda\vec{AB}+\mu(\vec{AB}+\vec{BC})=(\lambda+\mu)\vec{AB}+\mu\vec{BC}$

即：$[\frac{2}{3}-(\lambda+\mu)]\vec{AB}=\mu\vec{BC}-\frac{2}{3}\vec{BA'}$

$\because \vec{BA'}$、$\vec{BC}$共线，则不妨设$\vec{BA'}=t\vec{BC}$

$\therefore [\frac{2}{3}-(\lambda+\mu)]\vec{AB}=(\mu-\frac{2}{3}t)\vec{BC}$

由题知：AB和BC是三角形的两边，必然相交，

则$\frac{2}{3}-(\lambda+\mu)=0$

$\therefore \lambda+\mu=\frac{2}{3}$

那么如果有奔驰定理作为知识储备，

本质教育版权所有

看到题目里的$S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}=4:3:2$，

由奔驰定理有：$S_{\Delta AOB}\cdot\vec{OC}+S_{\Delta BOC}\cdot\vec{OA}+S_{\Delta COA}\cdot\vec{OB}=0$

则$4\vec{OC}+3\vec{OA}+2\vec{OB}=0$，

则$\vec{AO}=\frac{4}{3}\vec{OC}+\frac{2}{3}\vec{OB}$ I.

化简已知式子，从图中我们知道：

$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{BO}$，$\vec{AC}=\vec{AO}+\vec{CO}$

则$\vec{AO}=\lambda\vec{AO}+\lambda\vec{OB}+\mu\vec{AO}+\mu\vec{OC}$ II.

可以将II式写成$\vec{AO}=\frac{\mu}{1-\lambda-\mu}\vec{OC}+\frac{\lambda}{1-\lambda-\mu}\vec{OB}$

比较I、II系数即可求出：$\lambda=\frac{2}{9}$，$\mu=\frac{4}{9}$，则$\lambda+\mu=\frac{2}{3}$

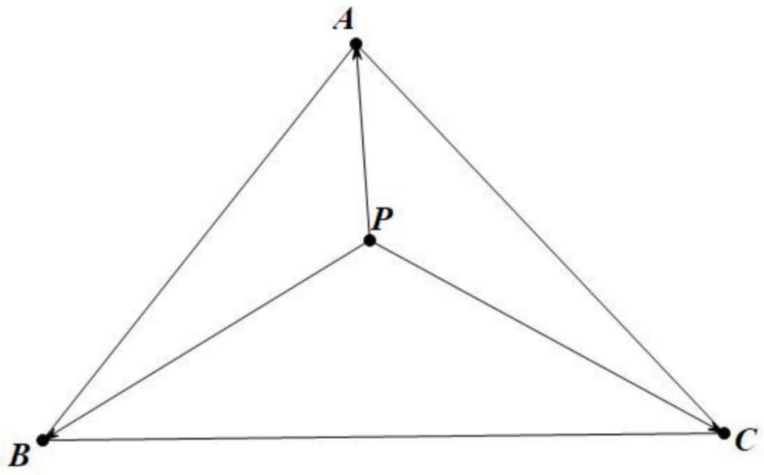
【直接记住结论解题】

如果利用好这个公式，我们就能多一条翻译的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

公式 29：

“奔驰定理”

本质教育版权所有



对于ΔABC内一点P，恒有：

$$S_{\Delta PBC}\cdot\vec{PA}+S_{\Delta PAC}\cdot\vec{PB}+S_{\Delta PAB}\cdot\vec{PC}=0$$

大家记住了吗？

本质教育高中数学网课 – 李泽宇高中数学：

www.essence-edu.cn

课程优势

版权所有

李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课