

本质教育 小学数学思维

第 4 课：特殊化 1-竖式

我们从一个例题开始吧：

例 1：下面每一个字母代表一个不为 0 的位数，我们有如下加法计算：

$$\begin{array}{r} AB \\ + BA \\ \hline CDC \end{array}$$

求： $A + B + C + D$ 的值

如何解决这个问题呢？首先我们在第 2 课学过了“翻译”的思想，我们解决数学问题的时候往往需要将中文翻译为对应的数学语言，这里“不为 0 的位数”说明 A, B, C, D 为 1, 2, 3, ..., 9 这几个数中的一个。

接着这么办？同学们觉不觉得这题有点抽象？即不是特别明白其意思？大家回想一下，平时遇到抽象的东西，老师是如何帮我们理解的？

例如：求任何一个个位数为 5 的自然数的平方

我们可以

- (1) 先取其非个位数部分
- (2) 将其和其下一个自然数的相乘
- (3) 我们在乘积后添加一个 25 即可

看完这些描述是不是觉得头有点晕，不知道在说什么？怎么办才能理解呢？我们举一个例子：

$$15^2$$

我们首先去掉个位数 5，剩下的是 1

然后 1 和其下一个自然数，即 2，相乘得 2

最后我们在 2 的后面添加 25，即 $15^2 = 225$

是不是觉得好理解些了？我们再举一个例子：

$$65^2$$

首先去掉个位数 5，剩下的是 6

然后 6 和 7 相乘得 42

最后我们再 42 后面添加 25，即 $65^2 = 4225$

怎么样？这个计算规律是不是理解了？同学们自己试着计算下 115^2 。有余力的同学借助第

一种“翻译”，看看能不能证明这个结论。

上面的结论同学们以后的计算可以直接使用。这个例子还告诉了我们这么一个道理：

当问题抽象，难以理解时，我们可以通过举例子来帮助我们理解。

简单的说，题目难以理解时，我们可以对题目中抽象的未知数代入具体的值，来帮助我们理解题目。这就是我们李泽宇三招™的第二招-特殊化的第一种使用。

我们就用这个原则来解决我们的例题：将具体的数代入字母中。注意这招一个技巧：**我们优先从最特殊，最极端(最大最小)的例子入手。**这也是这招叫做特殊化而不是具体化的原因。

我们可以试试最小：

$11+11=22$,这时候 $C=0$ 和题目的条件矛盾。因此这里说明数字不能太小。

我们再试试最大：

$$99 + 99 = 200 - 2 = 198$$

这样我们就得出 $CDC \leq 198$ ，因此 $C < 2$ ，而 C 不能为0，因此 C 只能为1。

这就是特殊化-从极端入手后的好处，极端的情况给了我们边界，式子变成：

$$\begin{array}{r} AB \\ + BA \\ \hline 1D1 \end{array}$$

$A+B=01,11,21,31\dots$ 才能使得他们之和的个位是1

我们继续用特殊化， $A+B \leq 9+9=18$, $A+B \geq 1+1=2$ ，因此 $A+B$ 不可能为01，也不可能是21,31,...，只能是11

因此 $D=2$ ， $A+B+C+D=11+1+2=14$

这道例题还有一个结论要大家记住：两个数相加，加法最多进一位。即加法进位要么是0，要么是1。

我们先从个位数开始：

最大的两个个位数之和为 $9+9=18$ ，只能进一位

那么十位呢？最大的两个10位数之和为 $99+99=200-2=198$ 只能进一位。以此类推。因此所有的加法，最多往前进一位。

例2. 下面的算式是由0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9这10个数字组成（不能重复使用），其中有几个数字写漏了，请把它们找出，并写出所有可能的填法。

$$\begin{array}{r} \square 4 \square \\ + \quad 3 \square 6 \\ \hline \square 0 \square \square \end{array}$$

思路：利用我们上面一问的结论，我们知道和的首位一定是1

那么第一个加数的百位有两种可能：

$$7+3=10$$

或者 $6+3=9$ 再加上十位进位的 1 为 10. 这种可能性排除，因此只能为 7

还剩下 2, 5, 8, 9 这 4 个数

$$2+6=8 \text{ 可能}$$

$$5+6=11, \text{有 } 1, \text{ 不可能}$$

$$8+6=14, \text{有 } 4, \text{ 不可能}$$

$$9+6=15 \text{ 有可能}$$

答案： $742+356=1098$

例 3. (有难度) 下面减法计算中每一个汉字代表一个位数，且它们互不相同，求出满足这个式子的所有可能的汉字的值

$$\begin{array}{r} \text{同窗好友} \\ - \text{同窗好} \\ \hline \text{友好友好} \end{array}$$

思路：这是一道减法，和我们前面的例题不同，从简单入手，你能将其转化为前面的加法吗？接着，利用前面关于进位的结论，你能得出什么？每一个汉字就相当于我们在第二课中学习过的字母（用字母代表数-代数语言），能不能翻译一下？

答案： $\text{同}=5, \text{窗}=2, \text{好}=7, \text{友}=4$

例 4. 写出中国象棋棋子代表的数字（它们都是位数，且代表的数字互不相等，写出所有可能性）

$$\begin{array}{r} \text{车} \quad \text{马} \quad \text{炮} \\ \times \quad \quad \text{炮} \\ \hline \text{象} \quad \text{马} \quad \text{炮} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{象} = \underline{\quad\quad\quad} & \text{车} = \underline{\quad\quad\quad} \\ \text{马} = \underline{\quad\quad\quad} & \text{炮} = \underline{\quad\quad\quad} \end{array}$$

思路：这是特殊化的第二个重要的运用：在数学上，当我们遇到有限可能的时候，我们很高兴，我们可以分别讨论每一个！（特殊化可以证明！）

答案：

$$175 \times 5 = 875, \text{ 或 } 125 \times 5 = 625$$

练习题:

1. (华杯赛) “华杯赛”是为了纪念和学习我国杰出的数学家华罗庚教授而举办的全国性大型少年数学竞赛. 华罗庚教授生于 1910 年, 现在用“华杯”代表一个两位数. 已知 1910 与“华杯”之和等于 2004, 那么“华杯”代表的两位数是多少?

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \quad 1 \quad 0 \\ + \quad \quad \quad \text{华 杯} \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \end{array}$$

2. (迎春杯) 在下边的竖式中, 相同字母代表相同数字, 不同字母代表不同数字, 则四位数 $tavs = \underline{\quad}$

$$\begin{array}{r} \quad \quad s \quad t \quad v \quad a \\ + \quad \quad v \quad t \quad s \quad t \\ \hline t \quad t \quad v \quad t \quad t \end{array}$$

3. 下面的字母各代表什么数字, 算式才能成立?

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad A \quad B \quad C \quad D \\ + \quad \quad \quad E \quad B \quad E \quad D \\ \hline E \quad D \quad C \quad A \quad D \end{array}$$

4. 右面算式中每一个汉字代表一个数字, 不同的汉字表示不同的数字. 当它们各代表什么数字时算式成立?

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \text{好 啊 好} \\ + \quad \quad \quad \text{真 是 好} \\ \hline \text{真 是 好 啊} \end{array}$$

5. 下面算式中, 相同汉字代表相同数字, 不同汉字代表不同数字, 求“数学真好玩”代表的数是几?

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \text{爱 好 真 知} \\ + \quad \quad \quad \text{数 学 更 好} \\ \hline \text{数 学 真 好 玩} \end{array}$$

6. (华杯赛) 在下面的算式中, 汉字“第、十、一、届、华、杯、赛”, 代表 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中的 7 个数字, 不同的汉字代表不同的数字, 恰使得加法算式成立. 则“第、十、一、届、华、杯、赛”所代表的 7 个数字的和等于_____.

$$\begin{array}{r} \text{第 十 一 届} \\ + \quad \text{华 杯 赛} \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \end{array}$$

7. (迎春杯) 下面两个算式中, 相同的字母代表相同的数字, 不同的字母代表不同的数字, 那么 $A+B+C+D+E+F+G=$ _____。

$$\begin{array}{r} A \quad B \quad C \quad D \\ + \quad E \quad F \quad G \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} D \quad C \quad B \quad A \\ + \quad G \quad F \quad E \\ \hline 9 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \end{array}$$

8. (华杯赛) 如下图是两个三位数相减的算式, 每个方框代表一个数字. 问: 这六个方框中的数字的连乘积等于多少?

$$\begin{array}{r} \square \quad \square \quad \square \\ - \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline 8 \quad 9 \quad 4 \end{array}$$

9. (走美杯) 在下式的每个空格里填入一个数字, 使竖式成立。

$$\begin{array}{r} \square \quad 0 \quad 0 \quad 5 \\ - \quad 2 \quad 0 \quad \square \quad 6 \\ \hline \square \quad 9 \quad \square \end{array}$$

10. (2010•育苗杯) 在方框内填上适当的数使算式成立 .

$$\begin{array}{r} \square \quad 4 \quad \square \\ - \quad \square \quad \square \quad 6 \\ \hline 6 \quad 5 \quad 8 \end{array}$$

本质教育版权所有 www.essence-edu.cn

练习思维和答案：

1.“华杯赛”是为了纪念和学习我国杰出的数学家华罗庚教授而举办的全国性大型少年数学竞赛。华罗庚教授生于1910年，现在用“华杯”代表一个两位数。已知1910与“华杯”之和等于2004，那么“华杯”代表的两位数是多少？

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \quad 1 \quad 0 \\ + \quad \quad \text{华} \quad \text{杯} \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \end{array}$$

思路：利用结论：两个数相加，要么不进位要么前进一位：发现“0+杯”不能进位，观察十位加法结果为0可知“1+华”进了一位

答案：“杯=4”，
“1+华”进了一位，因此“1+华=0+10”
因此，“华杯”代表的两位数是94。

2.在下边的竖式中，相同字母代表相同数字，不同字母代表不同数字，则四位数 $\overline{tavs} = \underline{\quad}$

$$\begin{array}{r} \quad \quad s \quad t \quad v \quad a \\ + \quad \quad v \quad t \quad s \quad t \\ \hline t \quad t \quad v \quad t \quad t \end{array}$$

思路：这也是一道加法题，利用“所有的加法，最多往前进一位的规律”来逐步转化为方程去求解

答案：

利用加法进位的结论，我们知道和的首位一定是1，即 $t=1$

之后我们再从个位入手，由于结果的个位数也是 $t=1$ ，故个位相加“ $a+t$ ”没有进位（可以用特殊化去帮助我们理解， a 最大为9也只有取9时可以进位，但 $9+1=10$ 与题目条件不符）

所以 $a+t=t$ ，得到 $a=0$

再观察十位，我们分为两种情况

① $v+s$ 进位： $v+s=11$ ，

则百位计算为 $t+t+1=v$ 得到 $v=3, s=8$

② $v+s$ 不进位， $v+s=1$ （由于 $t=1, a=0$ ，则 v, s 大于1故不成立）

因此四位数 \overline{tavs} 为1038

3. 下面的字母各代表什么数字，算式才能成立？

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \ D \\ + \ E \ B \ E \ D \\ \hline E \ D \ C \ A \ D \end{array}$$

思路：这是一道简单的加法题，利用加法至多进一位的原则易得出 E 的值

答案：

利用加法进位的结论，我们知道和的首位一定是 1，即 $E=1$

之后我们再从个位入手，可知 $D+D$ 没有进位（若进位则有 $D+D=D+10$ ，则 $D=10$ ）

故 $D+D=D$ ，所以 $D=0$ 。

此时算式为：

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \ 0 \\ + \ 1 \ B \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ C \ A \ 0 \end{array}$$

观察 发现这时我们从千位的加法入手较为简单，分两种情况：

①后面没有进位：

$A+1=10+0$ 得到 $A=9$

由十位 $C+1=9$ 可确定 $C=8$

故百位 $B+B=8$ 可确定 $B=4$ 。

得出问题的一个解：

$$\begin{array}{r} 9 \ 4 \ 8 \ 0 \\ + \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 8 \ 9 \ 0 \end{array}$$

②后面进位 1

$A+1+1=10$ 得到 $A=8$

同时： $C+1=18$ ，即 $C=17$ ，这不可能。因此只有一个答案。

4. 右面算式中每一个汉字代表一个数字，不同的汉字表示不同的数字。当它们各代表什么数字时算式成立？

$$\begin{array}{r} \text{好 啊 好} \\ + \ \text{真 是 好} \\ \hline \text{真 是 好 啊} \end{array}$$

思路：加法最多进一位，易知“真”的数值

答案：

由于是三位数加上三位数，其和为四位数，所以“真”=1。
百位向千位进了一位有：

好+1=是+10 或好+1+1=是+10 两种情况

①好+1=是+10 整理为好=是+9，可知是=0
带入，得啊=8

$$\begin{array}{r} 989 \\ + 109 \\ \hline 1098 \end{array}$$

②好+1+1=是+10，即好=是+8

那么是=0 或是=1

若是=0，好=8，代入，个位计算得啊=6，但十位 $6+0+1=7$ 无法进位，矛盾

若是=1，好=9，个位计算得啊=8，啊+是+1=8+1+1=10 \neq 9 矛盾

5. 下面算式中，相同汉字代表相同数字，不同汉字代表不同数字，求“数学真好玩”代表的数是几？

$$\begin{array}{r} \text{爱 好 真 知} \\ + \text{数 学 更 好} \\ \hline \text{数 学 真 好 玩} \end{array}$$

思路：与上一题思路类似，加上特殊化取极端值来帮助理解，请同学们好好理解我们为什么要使用特殊化，特殊化的好处在哪里？

答案：

利用加法进位的结论，我们知道和的首位一定是1，所以“数”=1。我们有：

$$\begin{array}{r} \text{爱 好 真 知} \\ + 1 \text{ 学 更 好} \\ \hline 1 \text{ 学 真 好 玩} \end{array}$$

再看千位，由于百位至多进1位，但由于题中抽象未知量太多，因此我们对于千位加法可以利用特殊化的手段取极端值

爱最大能取9即“爱”+“数”+1最大为 $9+1+1=11$ ，所以“学”不超过1，而“数”为1，所以“学”只能为0。竖式变为

$$\begin{array}{r} \text{爱 好 真 知} \\ + 1 0 \text{ 更 好} \\ \hline 1 0 \text{ 真 好 玩} \end{array}$$

那么“真”至少为2，所以百位不可能进位（进位的话只能好=9，且十位进位1，这时真=0

矛盾)，故“爱”=10-1=9。

由于“好”和“真”不同，所以“真”=“好”+1，十位向百位进1位。如果个位不向十位进位，则“真”+“更”=“好”+10，得到“更”=9，和“爱”=9矛盾，所以个位必定向十位进1位，则“真”+“更”+1=“好”+10，得到“更”=8。

$$\begin{array}{r} 9 \text{ 好 真 知} \\ + 1 \text{ 0 8 好} \\ \hline 1 \text{ 0 真 好 玩} \end{array}$$

现在：

$$\text{“真”} = \text{“好”} + 1 \quad (1)$$

$$\text{“知”} + \text{“好”} = 10 + \text{“玩”} \quad (2)$$

“真”、“好”、“知”、“玩”为2, 3, 4, 5, 6, 7中的数。由于“玩”至少为2，而“知”+“好”最大为6+7=13（再次使用特殊化），所以“玩”为2或3。

若“玩”为3，则“知”与“好”分别为6和7，此时无论“好”为6还是7，“真”都会与已有的数字重复，不合题意。

若“玩”为2，则“知”与“好”分别为5和7，若“好”为5，那么“知”=7，“真”=6。此时“数学真好玩”代表的数是10652。

若“好”为7，那么“知”=5，“真”=8与“更”=8矛盾。
因此，只有一种可能，“数学真好玩”代表的数是10652。

6. 在下面的算式中，汉字“第、十、一、届、华、杯、赛”，代表1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9中的7个数字，不同的汉字代表不同的数字，恰使得加法算式成立。则“第、十、一、届、华、杯、赛”所代表的7个数字的和等于_____。

$$\begin{array}{r} \text{第 十 一 届} \\ + \phantom{\text{第 十 一 届}} \text{华 杯 赛} \\ \hline 2 \text{ 0 0 6} \end{array}$$

思路：竖式的加法，利用两数相加，加法最多进一位的原则，以及对于多种可能的情况加以分类讨论

答案：

通过观察我们发现显然十位和百位都出现了进位，

所以有以下的等式：第=1，

十+华+1=0+10 即 十+华=9

对于个位我们分两种情况

①如果“届”+“赛”没有出现进位，那么“一+杯”=10 (1)， “届+赛”=6 (2)，那么其中一个为2，另一个为6，不妨令届=2，赛=4 (1已经被用了，不可能3+3=6)

那么“一+杯”中有一个小于5的数必然是3，另一个是7。

这样的话，还剩下没有用的数字就是5, 6, 8, 9就不存在不重复的“十”和“华”使它们的和是9，因此排除这种可能。

②由于“届”+“赛”出现进位，那么“一”+“杯”=9，“届”+“赛”=16，所以7个汉字代表的7个数字之和：第+十+华+一+杯+届+赛=1+9+9+16=35

7. 下面两个算式中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字，那么 $A+B+C+D+E+F+G=$ _____。

$$\begin{array}{r} A \quad B \quad C \quad D \\ + \quad E \quad F \quad G \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} D \quad C \quad B \quad A \\ + \quad G \quad F \quad E \\ \hline 9 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \end{array}$$

思路：虽然是两个竖式计算，但方法没有变

答案：

第一个竖式加法的百位与十位计算结果为0，则百位与十位计算都是进位的

因此 $A+1=2$ ，得到 $A=1$

百位有 $B+E+1=10$ (1)

第二个竖式加法从个位入手

$A+E$ 没有进位， $1+E=7$ 所以 $E=6$ 代入式 (1) 有 $B=3$

十位加法不可能进位 (特殊化帮助理解)， F 取 7、8、9 时方可进位，但十位结果均不为 8)

即不进位： $B+F=8$ 得到 $F=5$

所以对于第一个竖式十位加法

①若个位不向十位进位： $C+F=10$ 解出 $C=5=F$ 不成立

②个位向十位进位： $C+F+1=10$ 解出 $C=4$

且有 $D+G=17$

综上， $A+B+C+D+E+F+G=1+3+4+8+6+5+9=36$ 。

8. 如下图是两个三位数相减的算式，每个方框代表一个数字。问：这六个方框中的数字的连乘积等于多少？

$$\begin{array}{r} \square \quad \square \quad \square \\ - \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline 8 \quad 9 \quad 4 \end{array}$$

思路：这是一道减法，和我们前面的题不同，从简单入手，将其转化为加法

答案：

转化为加法，翻译后得到：

$$\begin{array}{r} 894 \\ + abc \\ \hline def \end{array}$$

$a \neq 0, d \neq 0$

首位加法不进位，所以

$8+a=d$ 或 $8+a+1=d$ (若十位进位，可知 $9+a=d$ 不成立)，
即十位不进位 $8+a=d$ ，易知 $a=1, d=9$

$$\begin{array}{r} 894 \\ + 1bc \\ \hline 9ef \end{array}$$

十位加法为： $9+b=e$ (不能进位) 易知 $b=0, e=9$

由于出现 $b=0$ ，于是这六个方框中的数字的连乘积等于 0

9. 在下式的每个空格里填入一个数字，使竖式成立。

$$\begin{array}{r} \square \quad 0 \quad 0 \quad 5 \\ - 2 \quad 0 \quad \square \quad 6 \\ \hline \square \quad 9 \quad \square \end{array}$$

思路：这是一道减法，和我们前面的题不同，从简单入手，将其转化为加法

答案：我们可以利用第一招“翻译”，用字母代表数来表达方框里的未知数

$$\begin{array}{r} a9b \\ + 20c6 \\ \hline d005 \end{array}$$

从个位入手，个位加法进位： $b+6=10+5$ 得到 $b=9$

十位加法也进了一位： $9+c+1=10$ 得 $c=0$

百位加法也进了一位： $a+1+0=10+0$ 即 $a=9$

千位 $2+1=d, d=3$

故原式为 $3005 - 2006 = 999$ 。

10. (2010•育苗杯) 在方框内填上适当的数使算式成立。

$$\begin{array}{r}
 \square \quad 4 \quad \square \\
 - \square \quad \square \quad 6 \\
 \hline
 6 \quad 5 \quad 8
 \end{array}$$

思路：将减法转化为加法，利用翻译使字母代表未知数

答案：

解：设方框里对应的数为 a,b,c,d

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 8 \\
 + \ a \ b \ 6 \\
 \hline
 c \ 4 \ d
 \end{array}$$

从个位加法入手可知 $6+8=14$ 则 $d=4$

并且个位加法进位，对于十位加法有 $5+b+1=14$ 解出 $b=8$

百位则： $6+a+1=c$ 即 $7+a=c$

有 $a=1, c=8$ 及 $a=2, c=9$ 两种情况

因此第一种答案为 $a=2, b=8, c=9, d=4$

$$\begin{array}{r}
 9 \ 4 \ 4 \\
 - 2 \ 8 \ 6 \\
 \hline
 6 \ 5 \ 8
 \end{array}$$

第二种答案为 $a=1, b=8, c=8, d=4$

$$\begin{array}{r}
 8 \ 4 \ 4 \\
 - 1 \ 8 \ 6 \\
 \hline
 6 \ 5 \ 8
 \end{array}$$

李泽宇数学(小学数学思维)

培养 **数学家思维**，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

(每周少量名额扫码加助教预约)

