

本质教育 小学数学思维

第3课：从简单入手 2 – 速算 1

1. 从简单入手 – 将问题转化为我们已经学过的简单问题（有标准解法的问题（例如方程），好计算的问题，等等）

我们先来看一个有趣的问题：

数学老师出了一道题目：

现在有一个可以出自来水的水龙头，一包茶叶，一个空茶壶，一个可以点火的煤气炉，一个空茶杯

- (1) 请问如何泡一杯茶？
- (2) 先给你一个装满一半水的茶壶，请问如何泡一杯茶？用两种方法解答。

第一个问题很简单，我们利用水龙头将空茶壶装满水，利用煤气炉烧开，同时将茶叶放入空茶杯中，等水烧开后将开水倒入空茶杯即可。

第二个问题呢？同学们可以自己想想。

其中一种就是利用上面的方法。

还有一种答案很简单：把水壶中的水倒掉。这样问题就转化为第一问，得解。

这就是数学哲学中从简单入手的很重要的一种思维方式。有很多问题是有固定步骤（套路）的，例如我们上一课学到的解方程，而有些问题的计算等非常简单。如果我们能够把复杂的问题转化为简单的问题，那么解决起来不就方便了吗？

同学们已经学会了四则运算，并累计了一些计算的_{经验}。同学们发现，什么样的运算是简单的？

相信同学们已经发现了，**整十位数（个位数是 0），整百位数（个位数，十位数都是 0），整千位数（个位，十位，百位都是 0）**之间的计算比较简单（原因就是**这个数字 0**）。

例如： 100×50 就比 99×49 的计算要简单得多。

那么遇到接近于整十位，整百位这样得数如何处理？从简单入手，我们可否先将这些数字转化为整十位，整百位数，然后利用运算法则计算？什么样的数字接近？位数为 9, 8, 0, 1（特别是 9 和 0）我们就要注意了。

例如上面的 $99 \times 49 = (100 - 1) \times 49 = 100 \times 49 - 1 \times 49 = 4900 - 49 = 4900 - 50 + 1 = 4851$

思维是灵活的，我们也可以借助 49 接近于 50 这个事实来计算：

$$99 \times 49 = 99 \times (50 - 1) = 99 \times 50 - 99 = 4950 - 99 = 4950 - 100 + 1 = 4851$$

慢慢的，同学们在计算的时候对这些接近于整十位，整百位等的数要敏感起来。

例1. 快速计算： $2000 + 2003 + 2006 + 2009 + 2012 + 2015$

思维：2003, 2006, 2009, 2012, 2015 都接近我们喜欢的，简单的 2000

因此： $2000 + 2003 + 2006 + 2009 + 2012 + 2015 = 2000 \times 6 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15$
 $= 12000 + 18 + 12 + 15 = 12045$

例2. 快速计算： 91×97

思维：我们将 97 其转为 100

$$91 \times 97 = 91 \times (100 - 3) = 9100 - 273 = 9100 - 300 + 27 = 8800 + 27 = 8827$$

例3. 快速计算： 3333×6666

思维：这题开始有点难度，3333, 6666 都不接近于整千位数 $\times 000$ ，或者整万位数 $\times 0000$

那么如何办？通过观察发现， $3 \times 3 = 9$ ，而 9999 非常接近 10000！

$$\begin{aligned} 3333 \times 6666 &= 3333 \times 3 \times 2222 = 9999 \times 2222 = (10000 - 1) \times 2222 \\ &= 22220000 - 2222 = 22217778 \end{aligned}$$

通过这个例子，同学们也意识到我们第一讲中学过的观察非常重要。

2. 对于乘法和除法我们有以下运算律：

$a(b + c) = ab + ac$ (注意：字母之间的乘号可以省略掉)

$$a(b - c) = ab - ac$$

很多同学只熟悉从左到右，现在开始要熟悉从右到左。

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$ab - ac = a(b - c)$$

这个过程也叫做提公因子(式)。

扩展：数学上，我们经常将加法/减法变成乘法，因为乘法的运算有很多特殊的性质。大家在后面要学习的质因数分解，以及对方程和不等式的化简都会用到这个规律，是一种常用的化简(从简单入手)的手段。

因此在使用提公因子的方法的时候，要注意观察，各个数之间有没有相近的地方？

例4. $209 \times 350 + 2090 \times 37 + 209 \times 280$

思路：没有一个数非常接近整百位数，但是通过观察发现 209, 2090, 209 每一个乘法中都有 209，因此我们想到提公因式化简：

$$209 \times 350 + 209 \times 370 + 209 \times 280 = 209 \times (350 + 370 + 280) = 209 \times 1000 = 209000$$

例5. $1999 \times 314 + 19990 \times 28 + 199900 \times 6$

思路：首先我们通过观察发现 1999 是共有的公共部分，而且更令我们高兴的是这家伙很接近 2000：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1999 \times 314 + 1999 \times 280 + 1999 \times 600 = 1999 \times (314 + 280 + 600) = \\ &1999 \times 1194 = (2000 - 1) \times 1194 = 2388000 - 1194 = 2386806 \end{aligned}$$

例6. $(980 \times 65 - 320) \div (66 + 98 \times 64)$

思路：通过观察我们发现 980×65 虽然和 98×64 不同，但有很多相似，我们能否先使得他们一致试一试，也许我们可用提公因式？

$$\begin{aligned}(980 \times 65 - 320) &= 10 \times (98 \times 65 - 32) = 10 \times (98 \times 64 + 98 - 32) \\ &= 10 \times (98 \times 64 + 66)\end{aligned}$$

我们很高兴：

$$\text{原式} = 10 \times (98 \times 64 + 66) \div (66 + 98 \times 64) = 10$$

例7. 快速计算： $(12345 + 23451 + 34512 + 51234 + 45123) \div 5$

思路：本题数字之间没有明显的相似，也没有数字接近整位数，怎么办？运用好我们第一讲学会的观察方法，先把每个数分解为5个位数，这时你将这五个数放在一起，你发现规律了吗？

五个数的每一位数都分别是1, 2, 3, 4, 5

因此：

$$\begin{aligned}12345 + 23451 + 34512 + 51234 + 45123 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 10000 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 1000 \\ &\quad + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 100 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 10 \\ &\quad + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 150000 + 15000 + 1500 + 150 + 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 150000 \div 5 + 15000 \div 5 + 1500 \div 5 + 150 \div 5 + 15 \div 5 \\ &= 30000 + 3000 + 300 + 30 + 3 = 33333\end{aligned}$$

3. 关于1作为位数

除了0以外，1也是在运算中我们喜欢的数字，特别是对于乘法，因为1乘以任何数就是这个数字本身： $a \times 1 = a$

因此，我们对于1作为位数相关的一些结论也要记忆：

从现在开始111, 37这2个数同学们也要开始敏感起来：

$$111 = 37 \times 3$$

这是很多速算问题经常用到的结论。

例8. $444444 \div 37037 \times 34 - 999999 \div 185185 \times 20$

思路：对于37, 111要熟悉，读完题目，观察之后要发现：

$$444444 = 111111 \times 4 = 111 \times 1001 \times 4, \quad 37037 = 37 \times 1001$$

因此:

$$444444 \div 37037 \times 34 = 111 \times 4 \div 37 \times 34 = 12 \times 34$$

$$999999 = 9 \times 111111 = 9 \times 111 \times 1001$$

$$185185 = 185 \times 1001 = 37 \times 5 \times 1001$$

因此:

$$999999 \div 185185 \times 20 = 9 \times 3 \div 5 \times 20 = 9 \times 3 \times (20 \div 5) = 12 \times 9$$

$$\text{因此原式} = 12 \times 34 - 12 \times 9 = 12 \times 25 = 250 + 50 = 300$$

另外一个就是下列数字:

	$\times 9$
1	9
12	108
123	1107
1234	11106
12345	111105
123456	1111104
1234567	11111103
12345678	111111102
123456789	1111111101

我们发现以下规律 (除了 1×9 以外):

- 1) 每一组和 9 相乘后的结果都进了一位
- 2) 十位为 0, 个位只取决于个位和 9 相乘得到的数的个位数 (这是个定理)
- 3) 其余各位的数字均为 1

正如我们上面所说, 1 这个数字我们也是喜欢的, 计算也很简单。

例9. 计算 $123456789 \times 36 \times 5$

思路: 知道上面的结论后就比较简单了:

$$\text{原式} = (123456789 \times 9) \times (4 \times 5) = 1111111101 \times 20 = 22222222020$$

练习题:

1. (2014•其他模拟) 计算 $89+899+8999+89999+899999 =$ _____ .
2. (2012•走美杯) $999+99+9+3 =$ _____ .
3. (2012•两岸四地) 计算: $19991999+9991999+991999+91999+1999+999+99+9$.
4. 计算 .
 $307+201 - 398 - 99$
 $208+494 - 498 - 95$
5. (2017•育苗杯) 计算: $2017 \times 2017 + 2016 \times 2016 - 2017 \times 2016 - 2015 \times 2016 =$ _____ .

6. (2018•陈省身杯) 计算: $87 \times 8 + 25 \times 6 + 38 \times 8 + 12 \times 6 - 8 \times 125 =$ _____ .

7. (2016•学而思杯) 计算:

(1) $(1234 + 2341 + 3412 + 4123) \div 5$

(2) $47 \times 43 + 79 \times 53 + 36 \times 47$.

8. $2005 \times 2005 - 2004 \times 2006$

9. $88888 \times 66667 + 44444 \times 66666$.

10. 简便计算: $99999 \times 1234 - 33333 \times 3702$.

11. $56789+67895+78956+89567+95678$.

12. 计算: $1949\times 20112011 - 2011\times 19491948$.

13. $999\times 27 - 333\times 51 + 666\times 35$.

14. (2011•其他模拟) $2002\times 20032003 - 2003\times 20022002$.

练习思维和答案：

1. (2014•其他模拟) 计算 $89+899+8999+89999+899999 = \underline{999985}$.

【思维】 从简单入手，我们可先将这些数字转化为整十位、整百位、整千位等等，89 接近 90、899 接近 900、8999 接近 9000、89999 接近 90000、899999 接近 900000

【解答】

$$\begin{aligned} \text{解: } & (90-1) + (900-1) + (90000-1) + (900000-1) + (9000000-1) \\ & = 90-1+900-1+90000-1+900000-1+9000000-1 \\ & = (90+900+9000+90000+900000) - (1+1+1+1+1) \\ & = 999990 - 5 \\ & = 999985 \end{aligned}$$

故答案为：999985 .

2. (2012•走美杯) $999+99+9+3 = \underline{1110}$.

【思维】 从简单入手，我们可先将这些数字转化为整十位、整百位、整千位；999 接近 1000、99 接近 100、9 接近 10

【解答】 解： $999+99+9+3$

$$\begin{aligned} & = (1000-1) + (100-1) + (10-1) + 3 \\ & = (100+100+10) - (1+1+1) + 3 \\ & = 1000+100+10 \\ & = 1110 \end{aligned}$$

故答案为：1110 .

3. (2012•两岸四地) 计算： $19991999+9991999+991999+91999+1999+999+99+9$.

【思维】 和前一题类似，还是从简单入手，我们可先将这些数字转化为整十位、整百位、整千位等等

【解答】

$$\text{解: 原式} = (19992000-1) + (9992000-1) + (992000-1) + (92000-1) + (2000-1)$$

$$\begin{aligned}
& + (1000-1) + (100-1) + (10-1) \\
& = 19992000 + 9992000 + 992000 + 92000 + 2000 + 1000 + 100 + 10 - 8 \text{ (我们还可以进行化简)} \\
& = 19990000 + 9990000 + 990000 + 90000 + 2000 \times 5 + 1102 \\
& = 10000 \times (1999 + 999 + 99 + 9 + 1) + 1102 \\
& = 10000 \times (2000 + 1000 + 100 + 10 - 3) + 1102 \\
& = 31070000 + 1102 = 31071102
\end{aligned}$$

4. 计算 .

$$307+201 - 398 - 99$$

$$208+494 - 498 - 95$$

【思维】 我们将 307 转化为 300、201 转化为 200、398 转化为 400、99 转化为 100，第二小问同理

$$\begin{aligned}
\text{【解答】解: (1) } & 307+201 - 398 - 99 \\
& = (300+7) + (200+1) - (400-2) - (100-1) \\
& = (300+200 - 400 - 100) + (7+1+2+1) \\
& = 0+11 \\
& = 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(2) } & 208+494 - 498 - 95 \\
& = (200+8) + (500 - 6) - (500-2) - (100-5) \\
& = (200+500 - 500 - 100) + (8 - 6+2+5) \\
& = 100+9 \\
& = 109
\end{aligned}$$

5. (2017·育苗杯) 计算: $2017 \times 2017 + 2016 \times 2016 - 2017 \times 2016 - 2015 \times 2016 = \underline{4033}$.

【思维】 我们通过观察发现 2017 是 2017×2017 、 2017×2016 共有的公共部分; 2016 是 2016×2016 、 2015×2016 共有的公共部分; 因此我们想到提公因式化简

【解答】 解： $2017 \times 2017 + 2016 \times 2016 - 2017 \times 2016 - 2015 \times 2016$
 $= 2017 \times 2017 - 2017 \times 2016 + 2016 \times 2016 - 2015 \times 2016$
 $= 2017 \times (2017 - 2016) + 2016 \times (2016 - 2015)$
 $= 2017 + 2016$
 $= 4033$
 故答案为：4033 .

6 . (2018·陈省身杯) 计算： $87 \times 8 + 25 \times 6 + 38 \times 8 + 12 \times 6 - 8 \times 125 = \underline{\quad 222 \quad}$.

【思维】 我们通过观察发现 8 是 87×8 、 38×8 、 8×125 共有的公共部分；6 是 25×6 、 12×6 共有的公共部分；因此我们想到提公因式化简

【解答】 解： $87 \times 8 + 25 \times 6 + 38 \times 8 + 12 \times 6 - 8 \times 125$
 $= 87 \times 8 + 38 \times 8 - 8 \times 125 + 25 \times 6 + 12 \times 6$
 $= (87 + 38 - 125) \times 8 + (25 + 12) \times 6$
 $= 0 \times 8 + 37 \times 6$
 $= 222$

故答案为：222 .

7 . (2016·学而思杯) 计算：

(1) $(1234 + 2341 + 3412 + 4123) \div 5$

(2) $47 \times 43 + 79 \times 53 + 36 \times 47$.

【思维】 (1) 与讲义例 7 类似；运用好我们第一讲学会的观察方法，先把每个数分解为 4 个数，这时你将这四个数放在一起发现规律：四个数的每一位数都分别是 1, 2, 3, 4

(2) 提公因式化简

【解答】 解： (1) $(1234 + 2341 + 3412 + 4123) \div 5$
 $= [(1+2+3+4) \times 1000 + (2+3+4+1) \times 100 + (3+4+1+2) \times 10 + (4+3+2+1) \times 1] \div 5$
 $= (10000 + 1000 + 100 + 10) \div 5$
 $= 2000 + 200 + 20 + 2$

$$=2222$$

$$(2) 47 \times 43 + 79 \times 53 + 36 \times 47$$

$$=47 \times 43 + 36 \times 47 + 79 \times 53$$

$$=47 \times (43+36) + 79 \times 53$$

$$=47 \times 79 + 79 \times 53$$

$$=79 \times (47+53)$$

$$=79 \times 100$$

$$=7900$$

$$8. 2005 \times 2005 - 2004 \times 2006$$

【思维】 本题数字之间没有一模一样的，但是通过观察发现 $2004+1=2005$

我们仍然可以转化为同一形式，最后提公因式化简

【解答】 解： $2005 \times 2005 - 2004 \times 2006$

$$=2005 \times 2005 - 2004 \times (2005+1)$$

$$=2005 \times 2005 - 2005 \times 2004 - 2004$$

$$=2005 - 2004$$

$$=1$$

$$9. 88888 \times 66667 + 44444 \times 66666 .$$

【思维】 通过观察，88888 与 44444 存在两倍关系， $88888=44444 \times 2$ 所以我们仍然可以转化为同一形式，最后提公因式化简

【解答】 解：

$$88888 \times 66667 + 44444 \times 66666$$

$$=44444 \times 2 \times 66667 + 44444 \times 66666$$

$$=44444 \times (2 \times 66667 + 66666)$$

$$=44444 \times (133334 + 66666)$$

$$=44444 \times 200000$$

$$= 8888800000$$

(本题还可以将 66667 转化为 66666, 同时 $66666=33333 \times 2$, 33333 如何变化? 和 99999 有什么关系?)

10. 简便计算: $99999 \times 1234 - 33333 \times 3702$.

【思维】 通过观察, 99999 与 33333 存在三倍关系, $99999=33333 \times 3$

【解答】 解: $99999 \times 1234 - 33333 \times 3702$,

$$= 9999 \times 1234 - 33333 \times 3 \times 1234$$

$$= 0 .$$

11. $56789+67895+78956+89567+95678$.

【思维】 与讲义中的例 7 类似, 还是观察, 先把每个数分解为 5 个位数, 这时你将这五个数放在一起发现规律: 五个数的每一位数都分别是 1, 2, 3, 4, 5

【解答】 解:

$$56789+67895+78956+89567+95678$$

$$= (5+6+7+8+9) \times 10000 + (5+6+7+8+9) \times 1000 + (5+6+7+8+9) \times 100 + (5+6+7+8+9) \times 10 + (5+6+7+8+9)$$

$$= 35 \times 10000 + 35 \times 1000 + 35 \times 100 + 35 \times 10 + 35 \times 1$$

$$= 35 \times (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1)$$

$$= 35 \times 11111$$

$$= 388885$$

12. 计算: $1949 \times 20112011 - 2011 \times 19491948$.

【思维】 通过观察发现 20112011 的形式很特殊, 我们可以把 20112011 化成 2011×10001

(这样我们就可以进行提公因式化简), 并且把 19491948 转化为 $1949 \times 10001 - 1$

【解答】 解: $1949 \times 20112011 - 2011 \times 19491948$

$$= 1949 \times 2011 \times 10001 - 2011 \times (1949 \times 10001 - 1)$$

$$= 1949 \times 2011 \times 10001 - 2011 \times 1949 \times 10001 + 2011$$

$$= 0 + 2011 = 2011$$

13. $999 \times 27 - 333 \times 51 + 666 \times 35$.

【思维】 通过观察发现 $999=333 \times 3$, $666=333 \times 2$ 再进行提公因式化简

【解答】 解: $999 \times 27 - 333 \times 51 + 666 \times 35$

$$= 333 \times 3 \times 27 - 333 \times 51 + 333 \times 2 \times 35$$

$$= 333 \times (81 - 51 + 2 \times 35)$$

$$= 333 \times (81 - 51 + 70)$$

$$= 333 \times 100$$

$$= 33300$$

14. (2011·其他模拟) $2002 \times 20032003 - 2003 \times 20022002$.

【思维】 同练习第 12 题, 观察发现 20032003 的形式很特殊 $20032003 = 2003 \times 10001$,

$$20022002 = 2002 \times 10001$$

【解答】 解: $2002 \times 2003 \times 10001 - 2003 \times 2002 \times 10001$

$$= 2002 \times 2003 \times (10001 - 10001)$$

$$= 0 .$$