

本质教育 小学奥数

第2课：初识数学语言 – 简单方程

1. 用字母代表数字 – 代数语言

到目前为止，同学们已经学习了大量的数学计算，并开始熟悉了5大运算规律：

- (1) 加法交换律
- (2) 加法结合律
- (3) 乘法交换律
- (4) 乘法结合律
- (5) 乘法分配律

如何清楚地表述这些运算规律？同学们可以自己试一试组织一下语言，用中文表述出来。

你发现，其实不是那么好表述。即使表述出来，也颇为复杂，不好理解，更难记忆：

两个数的和与一个数相乘，可以先把它们分别与这个数相乘，再相加

古代的数学家们也意识到了这个问题：我们的日常生活语言，无论是中文还是英语，其实都不太适合用作严谨，理性的表述。

小知识：你知道联合国的文件为什么一定要有法语版本吗？

那么怎么办呢？于是数学家们开发了数学语言。其中的一门就是代数语言，也叫做符号语言。我们可以用英文的字母，例如 x, y, z ，也可以用符号，例如 \triangle, \circ 来代表数字，在我们国家的古代，还会习惯用“天”，“地”等文字来表示数字。当然，发展到今天，我们最习惯的是法国大数学家笛卡尔的方法，即用字母表示数。由此，一门新的数学学问，代数

(algebra) 诞生了。清代数学家李善兰将其翻译为“代数”，一语总结了其中的精髓 – 代数即用字母代表数！我个人认为是极佳的翻译。

例如乘法分配律：

$$3 \times (5 + 8) = 3 \times 5 + 3 \times 8$$

$$4 \times (7 + 3) = 4 \times 7 + 4 \times 3$$

... ..

所有这些形形色色的例子都可以用一句符号语言总结：

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

这就是乘法交换律，清楚，明晰，毫无歧义，而且很好记忆。

所以从今天开始，同学们学习数学的时候，就不能再满足于文字描述，而要开始用数学语言（例如代数语言）来学习了。

这也对应了李泽宇三招™的第一招 – 翻译：(1) 我们解决数学问题的时候首先将中文（英文）翻译成相应的数学语言。（这一招还没完，我们一步一步来）

练习：用字母表示数，用代数语言描述上面的 5 大运算律。

2. 等式的基本性质

用等号连接的式子我们称之为等式。我们有一个等式：

$$a = b$$

很明显，等式可以交换左右两边：

即若 $a = b$ ，那么 $b = a$

由于他们相等，我们很容易理解，我们在等式的左右两边同时加上，减去，乘以同一个数，这个等式应该仍然是成立的，用数学语言来表述，即：

$$a + c = b + c$$

$$a - c = b - c$$

$$a \times c = b \times c$$

唯一要注意的是除法，我们学习过除数不能为 0，因此这个限制条件要加上去，我们可以在等式两边同时除以一个不为 0 的数，等式仍然是成立的：

$$c \neq 0$$

$$a \div c = b \div c$$

类似的，如果我们有两个等式，我们也可以将其左边和右边分别相加，相减，相乘，以及相除（除数不能为 0）

即：

$$a = b$$

$$c = d$$

那么我们有：

$$a + c = b + d$$

$$a - c = b - d$$

$$a \times c = b \times d$$

$$a \div c = b \div d (c, d \neq 0)$$

接下来我们通过几个例题，来体会如何在解决问题中使用好这一招——“翻译”

例 1 . 小王买一件上衣和两条裤子共用去 70 元。有知道两条裤子比一件上衣贵 10 元。

问：小王买的每条裤子多少钱？

应用题是很多同学害怕的题目。其实在数学语言的帮助下，应用题往往是最简单的。我们一起来使用第一招——翻译。

我们首先来将第一句话“小王买一件上衣和两条裤子共用去 70 元”翻译为数学语言。你知道一件上衣多少钱吗？2 条裤子呢？不知道。不知道的数字我们称之为未知数，虽然不知道，然他们还是数字，我们仍然可以用字母来代表他们-用字母代表数字，特别是未知数，这就是代数的基本思想！这样我们就可以将这句话翻译为数学语言了。

我们用 a 表示一件上衣花费的钱，用 b 表示 2 条裤子花费的钱，那么第一句话可以翻译为：

$$a + b = 70 \quad (1)$$

第二句话呢？“两条裤子比一件上衣贵 10 元”自然可以翻译为：

$$b - a = 10 \quad (2)$$

我们把含有未知数的等式称为方程(equation).

最后，我们来翻译这个问题的问法：小王买的每条裤子多少钱，翻译为数学语言即为： $b \div 2$ （因为两条裤子 b 元）

从今天开始，我们把题目的问题称之为目标。

我们要求的是 b ，因此我们对 a 到底是多少其实不感兴趣。怎么去掉 a ，保留 b 呢？

通过观察，我们发现等式（1）和等式（2）左边相加可以去掉 a （ $a - a = 0$ ），于是我们就这样操作：

将两个等式的左右分别相加（等式的性质），等式成立，有：

$$a + b + b - a = 80$$

$$2 \times b + 0 = 80$$

$$b = 40$$

于是，本题的目标是 $b \div 2$ ，即 $40 \div 2 = 20$

这种消去别的字母的方法是化简思维的一种，叫做消元（未知数也叫做“元”）。（很明显，字母越少，式子越简单，我们喜欢简单的式子。）同学们要开始养成这种意识。

这种通过加减的形式消元的方法叫做“加减消元法”。是一种固定的化简模式。

习惯了如何代数语言之后，同学们会发现上面的过程几乎是不懂脑筋的 – 我们就是老老实实一步一步将中文翻译为代数语言，然后通过加减消元，最后把式子变成 $x = a$ 的形式。

如果我们能够把题目变成方程，剩下的解方程不都是一个模式吗？应用题还困难吗？

我们再看几个题目：

例 2 . 在一次考试中，小强和小刚的成绩加起来是 199 分，小刚和小玲的成绩加起来是 198 分，小强和小玲的成绩加起来是 197 分，问他们三人的成绩各自是多少？

和例 1 类似，我们将本题翻译为数学语言：

先来翻译第一句话：“小强和小刚的成绩加起来是 199 分”

和上题类似，我们并不知道小强，小刚的成绩分别是多少，但没关系，我们用字母代表他们。我们用 x 表示小强的成绩， y 表示小刚的成绩（注意：不能用相同的字母，否则相当于我们自以为两人的分数相同，扭曲了原文的意思）

这句话可以翻译为：

$$x + y = 199 \quad (1)$$

接着是第二句：“小刚和小玲的成绩加起来是 198 分”

小玲的成绩不知道，我们用 z 来代表，于是这句话翻译为：

$$y + z = 198 \quad (2)$$

接着是第三句话：“小强和小玲的成绩加起来是 197 分”，可以翻译为：

$$x + z = 197 \quad (3)$$

最后我们翻译目标：求 x, y, z

思路：我们有 3 个字母，先消去一个，就可以起到化简的作用（消元化简）。我们通过观察发现，(1) 和 (2) 的左边相减可以消去 y ：

$$x + y - (y + z) = 199 - 198 = 1$$

$$x - z = 1 \quad (4)$$

接着 (4) 和 (3) 的左边相加可以消去 z ：

$$x + z + x - z = 1 + 197$$

即：

$$2x = 198$$

$$x = 99$$

这个时候，带入 (1)，我们有 $99 + y = 199$

那么等式两边同时减去 99，即：

$$99 + y - 99 = 199 - 99$$

$$y = 100$$

容易得出 $z = 98$

总结：利用数学语言处理应用题基本模式如下：

1. 将中文（英文）翻译成数学语言 – 这两个例子都是方程

2. 利用等式的性质化简方程（例如消元），最终将其化简为 $x = a$ 这样的形式。

最后我们来看一看在《孙子算经》中很出名的鸡兔同笼问题：

例 3. 有若干只鸡兔同在一个笼子里，从上面数，有 35 个头；从下面数，有 94 只脚。求笼中各有几只鸡和兔？

本题如果不用数学语言要用到**特殊化的思想（李泽宇三招™ 第二招特殊化）**——一种极端情况是全部都是鸡，那么共 35 只鸡，那么应该有 $35 \times 2 = 70$ 只脚，现在又 94 只脚，多出 24 只，这 24 只脚就是兔子带来的。每只兔子比鸡多出 2 只脚，因此 $24 \div 2 = 12$ ，有 12 只兔子才能多出 24 只脚，因此共 12 只兔子，23 只鸡。

（同学们自行尝试另一种极端情况：若都是兔子）

这一招特殊化的运用比较抽象和复杂，我们会在后面逐渐讲述背后的道理。上面的解法看似简单，其实却不好想。如果我们运用数学语言-翻译，这题其实很简单：

我们还是老样子，一句一句不动脑筋翻译为数学语言：

“有若干只鸡兔同在一个笼子里，从上面数，有 35 个头”

有多少只鸡？多少只兔子？不知道，但我们可以用字母代替，设有 a 只鸡， b 只兔子有 35 个头，因为一只鸡只有一个头，一个兔子也只有一个头，即：

$$a + b = 35 \quad (1)$$

然后我们翻译下一句：“从下面数，有 94 只脚”

因为一只鸡有 2 只脚，一只兔子有 4 只脚，因此这句话翻译为：

$$2 \times a + 4 \times b = 94 \quad (2)$$

剩下的就是化简这两个方程——消元

很容易通过观察发现，若我们将 (1) 的两边同时乘以 2，我们就可以利用 (2) - (1) 消去 a 这个字母了：

$$2 \times a + 2 \times b = 70$$

$$2 \times a + 4 \times b - (2 \times a + 2 \times b) = 94 - 70$$

即：

$$2 \times b = 24$$

$$b = 12$$

是不是很简单, 我们几乎没动什么脑筋? 我希望从这个例子同学们体会到数学语言在解决问题中的妙处。

练习题:

1. (2017•华罗庚金杯模拟) 某次数学竞赛, 试题共有 10 道, 每做对一题得 8 分, 每做错一题倒扣 5 分. 小宇最终得 41 分, 他做对_____题.
2. (2015•春蕾杯) 小军有 54 支铅笔, 小红有 28 支铅笔, 小军送给小红_____支铅笔后, 小军的铅笔数量只比小红多 2 支.
3. (2013•创新杯) 小刚家养的鸡和兔共有 112 只, 兔的脚比鸡的脚多 64 只, 那么鸡有_____只, 兔有_____只.
4. (2012•其他模拟) 鸡、兔共有 108 只, 兔的脚比鸡的脚多 36 只, 则兔有_____只.

5. (2017·学而思杯) 一个养殖园内, 鸡比兔多 36 只, 共有脚 792 只, 鸡兔各几只?
6. 一列火车和 20 辆同样的汽车共载旅客 2344 人, 火车比汽车多承载了 824 人, 则火车载了_____人, 每辆汽车载了_____人.
7. (2013·创新杯) 三年级某班租了 8 条船, 组织 42 名学生春游划船, 其中大船可坐 6 人, 小船可坐 4 人, 那么有_____条大船.
8. (2014·小机灵杯) 商店营业员去银行兑换零钱, 用 100 张一百元的人民币兑换了二十元与五十元的人民币共 260 张, 其中二十元的人民币有_____张, 五十元的人民币有_____张.
9. 坝下“仙进”仿古家具工艺厂甲班和乙班共有磨工 94 人, 因工作需要临时从乙班调 46 人到甲班工作, 这时乙班比甲班人数少 12 人, 原来甲班有多少人? 乙班有多少人?

10. 第一堆梨有 486 个, 第二堆梨有 502 个. 要使两堆梨的个数同样多, 应该从第二堆梨中取出几个放入第一堆?

11. 超市里, 水果糖每千克卖 20 元, 奶糖每千克卖 25 元, 巧克力糖每千克卖 30 元. 某天上午, 这三种糖一共卖了 20 千克, 总收入是 480 元. 已知奶糖和巧克力糖总共卖了 300 元, 请问: 其中卖出奶糖多少千克?

12. (2017·希望杯模拟) 小笨和小聪买了 60 包方便面, 小聪比小笨每周少吃 4 包, 二人恰好用了 6 周吃完了所有的方便面. 求小笨每周吃多少包方便面?

练习思维和答案：

1. (2017·华罗庚金杯模拟) 某次数学竞赛, 试题共有 10 道, 每做对一题得 8 分, 每做错一题倒扣 5 分. 小宇最终得 41 分, 他做对 7 题.

【思维】遇到中文我们首先应该怎么办? (翻译) 做对与做错的题目分别是多少对我们来说是未知的怎么办? 我们可以用什么代替我们未知的量?

【解答】

先来翻译这句中文: “试题共有 10 道, 每做对一题得 8 分, 每做错一题倒扣 5 分. 小宇最终得 41 分”, 我们并不知道做对与做错的题目分别是多少, 但没关系, 我们用字母代表他们. 我们用 x 表示做对题目的数量, y 表示做错题目的数量

试题共有十道翻译为 $x + y = 10$ (1)

小宇最终得 41 分翻译为 $8x - 5y = 41$ (2)

最后我们翻译目标: 求 x

接着我们来化简这些式子。

我们有 2 个字母, 先消去一个, 就可以起到化简的作用 (消元化简)。我们通过观察发现,

(1) 的左右两边同乘 5 后和 (2) 的相加可以消去 y :

$$5x + 5y + 8x - 5y = 50 + 41$$

$$13x = 91$$

$$x = 7$$

答: 他做对 7 题.

2. (2015·春蕾杯) 小军有 54 支铅笔, 小红有 28 支铅笔, 小军送给小红 12 支铅笔后, 小军的铅笔数量只比小红多 2 支.

【思维】遇到中文我们首先应该怎么办? 还是先一步步翻译, 和上题类似小军送给小红的铅笔数量未知, 我们可以用什么代替我们未知的量?

【解答】我们用 x 表示小军送给小红的铅笔数量

“小军的铅笔数量只比小红多 2 支”翻译为: $(54 - x) - (28 + x) = 2$

利用等式的基本性质进行化简

$$54 - x = 28 + x + 2$$

$$54 - x = 30 + x$$

$$54 - x + x - 30 = 30 + x + x - 30$$

$$24 = 2x$$

$$x = 12$$

故答案为：12 .

答：小军送给小红 12 支铅笔后，小军的铅笔数量只比小红多 2 支 .

3 . (2013•创新杯) 小刚家养的鸡和兔共有 112 只，兔的脚比鸡的脚多 64 只，那么鸡有 64 只，兔有 48 只 .

【思维】1.将中文翻译成数学语言，2 利用等式的性质化简方程（如消元），最终将其化简为 $x = a$ 这样的形式。

【解答】

设鸡有 x 只，兔有 y 只，根据题意翻译出方程：

“鸡和兔共有 112 只”： $x + y = 112$ (1)

“兔的脚比鸡的脚多 64 只”： $4y - 2x = 64$ (2)

化简解出 $x = 64, y = 48$

故鸡 64 只兔 48 只 .

故答案为 64, 48 .

4 . (2012•其他模拟) 鸡、兔共有 108 只，兔的脚比鸡的脚多 36 只，则兔有 42 只 .

【思维】1.将中文翻译成数学语言，2 利用等式的性质化简方程（如消元），最终将其化简为 $x = a$ 这样的形式。

【解答】设鸡有 x 只，兔有 y 只，根据题意翻译出方程：

“鸡和兔共有 108 只”： $x + y = 108$ (1)

“兔的脚比鸡的脚多 36 只”： $4y - 2x = 36$ (2)

化简解出 $x = 66, y = 42$

答：兔子有 42 只 .

故答案为：42 .

5. (2017·学而思杯) 一个养殖园内, 鸡比兔多 36 只, 共有脚 792 只, 鸡兔各几只?

【思维】 同上道练习

【解答】

设鸡有 x 只, 兔有 y 只, 根据题意翻译出方程:

“鸡比兔多 36 只”: $x - y = 36$ (1)

“共有脚 792 只”: $4y + 2x = 792$ (2)

化简解出 $x = 156, y = 120$

答: 鸡有 156 只, 兔有 120 只.

6. 一列火车和 20 辆同样的汽车共载旅客 2344 人, 火车比汽车多承载了 824 人, 则火车载了 1584 人, 每辆汽车载了 38 人.

【思维】 1. 将中文翻译成数学语言, 2 利用等式的性质化简方程 (如消元), 最终将其化简为 $x = a$ 这样的形式.

【解答】

设火车载了 x 人, 每辆汽车载 y 人, 根据题意翻译出方程:

$x + 20y = 2344$ (1)

$x - 20y = 824$ (2)

利用等式的基本性质化简 $x - 20y + x + 20y = 824 + 2344$

$x = 1584$

$y = 38$

故填: 1584, 38.

7. (2013·创新杯) 三年级某班租了 8 条船, 组织 42 名学生春游划船, 其中大船可坐 6 人, 小船可坐 4 人, 那么有 5 条大船.

【思维】和前几题类似, 先翻译再化简求解

【解答】设大船的数量是 x 条, 小船的数量是 y 条,

$$x + y = 8$$

$$6x + 4y = 42$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

答: 大船有 5 条.

故答案为: 5.

8. (2014·小机灵杯) 商店营业员去银行兑换零钱, 用 100 张一百元的人民币兑换了二十元与五十元的人民币共 260 张, 其中二十元的人民币有 100 张, 五十元的人民币有 160 张.

【思维】先翻译再化简求解

【解答】设二十元的数量是 x 张, 五十元的数量是 y 张,

$$x + y = 260$$

$$20x + 50y = 100 \times 100$$

$$x = 100$$

$$y = 160$$

答: 二十元的人民币有 100 张, 五十元的人民币有 160 张.

故答案为: 100, 160.

9. 坝下“仙进”仿古家具工艺厂甲班和乙班共有磨工 94 人，因工作需要临时从乙班调 46 人到甲班工作，这时乙班比甲班人数少 12 人，原来甲班有多少人？乙班有多少人？

【思维】和前几题类似，先翻译再化简求解

【解答】

设原来甲班有多少人 x 人，乙班有多少人 y 人

$$\text{式1: } x + y = 94$$

$$\text{式2: } (x + 46) - (y - 46) = 12$$

$$\text{式2 可化简为 } x - y = -80$$

再与式一相加解出

$$x = 7$$

$$y = 87$$

答：原来甲班有 7 人，乙班有 87 人。

10. 第一堆梨有 486 个，第二堆梨有 502 个，要使两堆梨的个数同样多，应该从第二堆梨中取出几个放入第一堆？

【思维】此题较为简单，还是先翻译再化简求解

【解答】

设应该从第二堆梨中取出 x 个放入第一堆

“要使两堆梨的个数同样多”翻译为： $486 + x = 502 - x$

$$486 - 486 + x + x = 502 - 486 - x + x$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

答：应该从第二堆梨中取出 8 个放入第一堆。

11. 超市里，水果糖每千克卖 20 元，奶糖每千克卖 25 元，巧克力糖每千克卖 30 元。某天上午，这三种糖一共卖了 20 千克，总收入是 480 元。已知奶糖和巧克力糖总共卖了 300 元，请问：其中卖出奶糖多少千克？

【思维】和前几题类似，先翻译再化简求解

【解答】

设卖出水果糖 x 千克，设卖出奶糖 y 千克，设卖出巧克力糖 z 千克

$$x + y + z = 20 \quad (1)$$

$$20x + 25y + 30z = 480 \quad (2)$$

$$25y + 30z = 300 \quad (3)$$

(2) - (3) 得

$$20x + 25y + 30z - 25y - 30z = 480 - 300$$

$$20x = 180$$

$$x = 9$$

代入 (1) (3)

$$\begin{aligned} \text{解出 } y &= 6 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

答：其中卖出奶糖 6 千克。

12. (2017·希望杯模拟) 小笨和小聪买了 60 包方便面，小聪比小笨每周少吃 4 包，二人恰好用了 6 周吃完了所有的方便面。求小笨每周吃多少包方便面？

【思维】把题目中的中文翻译为数学语言（可以用字母代替未知量），再利用等式的基本性质化简

【解答】

设小聪每周吃 x 包，小笨每周吃 y 包，目标为 y

“小聪比小笨每周少吃 4 包”翻译为： $y - x = 4$ (1)

“二人恰好用了 6 周吃完了所有的方便面”翻译为： $6x + 6y = 60$ (2)

我们可以利用消元化简的思想来解方程

(1) 式乘 6 与 (2) 式相加 (等式的基本性质)

$$6y - 6x + 6x + 6y = 4 \times 6 + 60$$

$$12y = 84$$

$$y = 7$$

答：小笨每周吃 7 包方便面。