李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到 101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

那些让你加快解题速度的高中数学定理-16

利用公式快速求直角三角形内切圆半径

作者：本质教育 王馨逸

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。今天介绍的是利用公式快速求直角三角形内切圆半径。

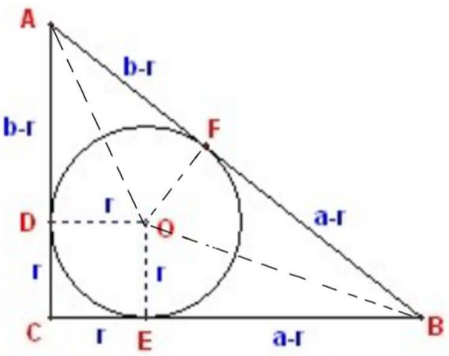
定理 16：在 $Rt\triangle ABC$ 中，角 C 是直角，则 $Rt\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ 。

只需记下这个简单的结论，在遇到求三角形内切圆半径的题目中，如果能够确定三角形为直角三角形，我们用这个公式就能快速解出半径的值，节省了我们的时间。还有在此公式的证明过程中，也有一些小结论，如果熟悉了这个公式及它的证明过程，在很多情况下都能快速解题。

我们先**证明**一下这个定理：

方法一：

如图设内切圆的圆心为 O，三个切点为 D,E,F。连接 OD,OE,OF,OA,OB。



$\because D,E,F$ 是三个切点

$\therefore OD \perp AC, OF \perp AB, OE \perp BC$

又 $\because OD \perp AC, OE \perp BC, AC \perp BC, OD = OE = r$

$\therefore$ 四边形 $DOEC$ 是一个正方形

$\therefore OD = CE = OE = DC = r$

$\therefore AD = b - r, BE = a - r$

在 $Rt\triangle ADO$ 和 $Rt\triangle AFO$ 中

$\because AO = AO, OD = OF$（HL）

$\therefore Rt\triangle ADO$ 与 $Rt\triangle AFO$ 全等

$\therefore AF = AD = b - r$

同理可得 $Rt\triangle OFB$ 和 $Rt\triangle OEB$ 全等

$\therefore FB = EB = a - r$

$\because AB = AF + BF$

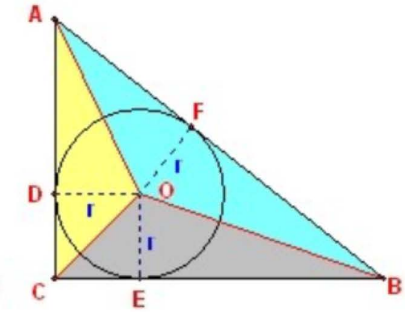
$\therefore c = b - r + a - r$ 即 $c = \dfrac{a+b-c}{2}$

我们证明到了直角三角形 ABC 内切圆的半径为 $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

方法二：

本质教育版权所有

如图设内球圆的圆心为 O，三个切点为 D,E,F。连接 OD,OE,OF,OA,OB



$\because D,E,F$ 是三个切点

$\therefore OD\perp AC,OF\perp AB,OE\perp BC$

$\therefore S\text{V}ABC=S\text{V}ACO+S\text{V}ABO+S\text{V}CBO$

$\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$ 即 $r=\frac{ab}{a+b+c}$

$\because a,b,c$ 是 $\text{V}ABC$ 的三条边

$\therefore a+b>c$ 即 $a+b-c>0$

$$\therefore r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2}$$

又 $\because \text{V}ABC$ 是直角三角形

$\therefore a^2+b^2=c^2$ 即 $a^2+b^2-c^2=0$

$$\therefore r=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2}$$

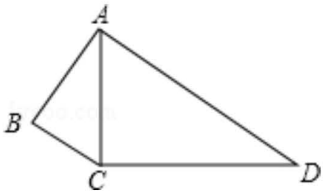
综上所述直角三角形 ABC 的内切圆半径是 $r=\frac{a+b-c}{2}$

证明过程中体现出来的小结论,在直角三角形的内切圆这类图中总有 $AD=AF,BF=BE$，四边形 $CEOD$ 为正方形。

【直接记住结论解题】

（2013•杭州模拟）如图，已知△ABC 与△ACD 都是直角三角形，∠B＝∠ACD＝90°，AB＝4，BC＝3，CD＝12．则△ABC 的内切圆与△ACD 的内切圆的位置关系是（　　）

本质教育版权所有



A．内切　　B．相交　　C．外切　　D．外离

【解答】

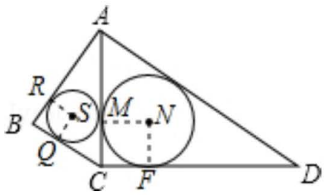
解：这道题目我们先从目标入手

盯住目标我们的目标是要求△ABC 的内切圆与△ACD 的内切圆的位置关系

所以我们作出两圆的内切圆，设圆 S 的切点为 R，Q，T，圆 N 的切点为 M，F，

圆 S 的内切圆半径为 r，圆 N 的内切圆半径为 R。

并把这些通过翻译体现在图像上



再次盯住目标求△ABC 的内切圆与△ACD 的内切圆的位置关系，

从图上可以看出是圆 S 与圆 N 是外离或者外切的关系，关键是证明圆 S 与圆 N 是否相切于 AC 上的同一点，即我们的目标转化为证明 CT 是否等于 CM。

盯住我们新的目标我们要求 CT 和 CM 的大小并判断它们是否相等，

根据我们上述的直角三角形内切圆的公式的证明过程得到的小结论可知

$R = CM = NF$， $CT = QC = BC - BQ = BC - r$

要求 r 和 R，我们联想到直角三角形的内切圆半径计算公式 $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

∵$\angle B = \angle ACD = 90°$，$AB=4$，$BC=3$，$CD=12$，

∴$AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=13$，

∴直角三角形△ABC 与△ACD 的内切圆半径分别为：$r=\dfrac{3+4-5}{2}=1$，$R=\dfrac{5+12-13}{2}=2$，

∴ $CM = R = 2$，$CT = BC - r = 3 - 1 = 2$

∵$CM=CT=2$，

∴T 与 M 重合，即两圆与 AC 切于同一点．

故△ABC 的内切圆与△ACD 的内切圆的位置关系是外切．

故选：C.

只需记下这个简单的结论，在遇到求直角三角形内切圆半径的题目中，我们用这个公式就能快速解出半径的值。熟悉它的证明过程，还可以得到一些小结论，在一些情况下能帮助我们快速解题。利用以上这个定理，计算量减少，有效的缩短了解题时间，使此类题目变得简单，让我们对这一类型的题目处理起来更得心应手。

定理 16：在 $Rt\triangle ABC$ **中，角 C 是直角，则** $Rt\triangle ABC$ *的内切圆半径为* $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ 。

记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-17

利用公式解决圆外一点到圆上的点的最值问题

作者：本质教育

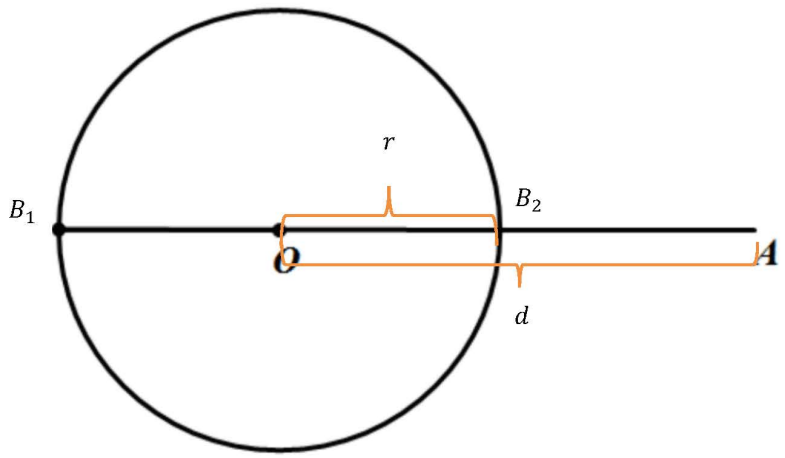
对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。今天我们讲一个初、高中课本均未出现的，而高考常考的定理。

定理 17：圆外一点到圆上的点的最短距离和最长距离都在此圆外点与圆心的连线所在的直线上，记圆外的点为A，圆上的点为B，圆心为O，记$OA=d$，圆的半径为r。则当O，A，B共线时，若B在线段OA之间，则AB取最小值$d-r$，若O在线段BA之间，则AB取最大值$d+r$。

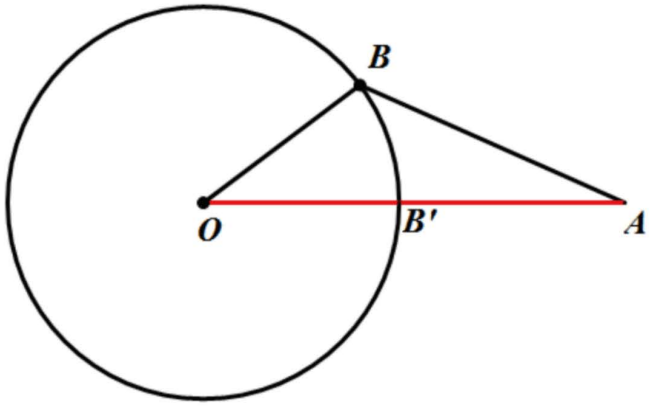
非常容易理解，我们用一张图来帮助大家记忆：



本质教育版权所有

如图，A为圆外一点，要求A到圆上的点的最大值和最小值，则AB_1为最大值$d+r$，AB_2为最小值$d-r$。

接下来我们证明一下这个定理：



如图，记$OA=d$，圆的半径为r，则$OB=OB'=r$

由三角形三边关系$OB+AB>OA=OB'+B'A$，

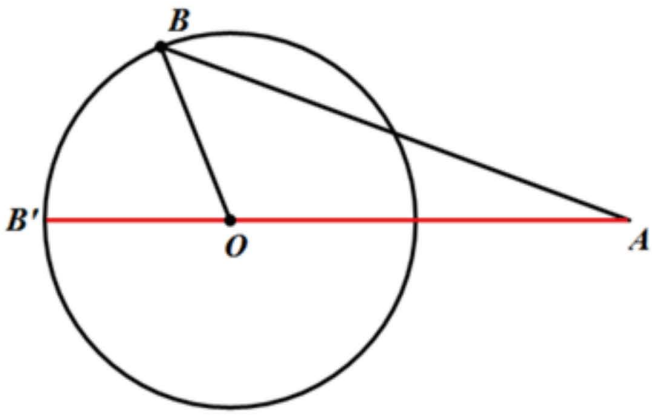
则$AB>AB'$

并且当B与B'重合时（B在圆心与点A的连线段OA上）有：$AB=AB'$

所以$AB\geq AB'$

所以B在圆心与点A的连线段OA上时，AB取最小值，则

$AB_{min}=d-r$.



同理，$OB+OA>AB$，

并且当O在线段AB上（B在点A与圆心的连线AO的延长线上）时，$OB+OA=AB=AB''$

则$AB''\geq AB$

所以B在[illegible]圆心的连线AO的延长线上时，AB取最小值，

即$AB_{max}=B''=d+r$.

下面我们以一道福建质检题为例：

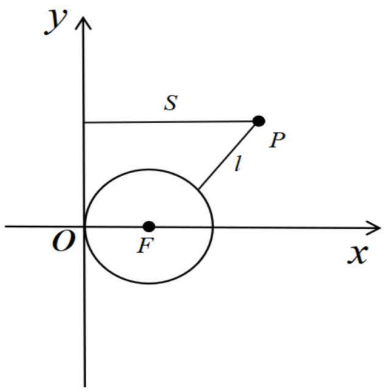
例.（2019•福建高三质检）在平面直角坐标系xOy中，圆$F:(x-1)^2+y^2=1$外的点P在y轴的右侧运动，且P到圆F上的点的最小距离等于它到y轴的距离，记P的轨迹为E.

（1）求E的方程

（2）……

分析

利用**本质教育第一招翻译**，将文字翻译成图形：



P到圆F上的点的最小距离等于它到y轴的距离，我们要把这句话**翻译**成数学语言。

如果我们不知道这个定理，那么下一步的进行就很困难了。

如果我们知道的话，那么应用定理就很简单了，记P到y轴的距离为S，P到圆F上的点的距离为l，

圆F半径为$r=1$，P到圆心距离为$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}(x>0)$

那么$S=l_{min}$，如果设P坐标为(x,y),(由题知$x>0$)，那么$S=x$

则$x=d-r$，即$x=\sqrt{(x-1)^2+y^2}-1$，

则$x^2+2x+1=x^2-2x+1+y^2$，

则E的方程为：$y^2=4x(x>0)$

定理 17：圆外一点到圆上的点的最短距离和最长距离都在此圆外点与圆心的连线上，记圆外的点为A，圆上的点为B，圆心为O，记$OA=d$，圆的半径为r。则当O，A，B共线时，若B在线段OA之间，则AB取最小值$d-r$，若O在线段BA之间，则AB取最大值$d+r$。

大家记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-19

三角形内角平分线性质定理

作者：本质教育 王子建

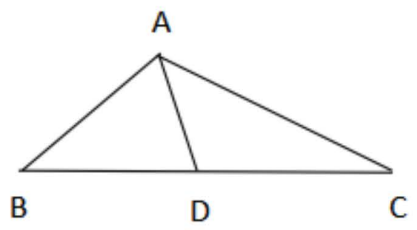
对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。今天，我们介绍三角形内角平分线定理。

公式19：在ΔABC中，AD平分$\angle BAC$，AD交BC于D，则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

示意图：



记忆窍门：以角平分线为分隔，左右两边之比等于左底边比右底边

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些在选择和填空题中有关三角形内角平分线的相关题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式：

过点B作$BE // AC$，交AD的延长线于E（如图2）

$\because \angle CAD = \angle BED$，又$\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle BED$.故$AB = BE$

$\because \Delta ADC \sim \Delta EDB$（易证）

$\therefore \dfrac{AC}{BE} = \dfrac{DC}{BD}$,即$\dfrac{BE}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$，代入$AB = BE$

从而有$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$

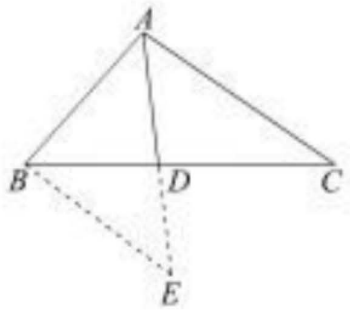


图 2

接下来，我们用一道高考原题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

本质教育版权所有

例1.(2010年全国II卷理科第8题)

ΔABC中，点D在边AB上，CD平分$\angle ACB$，若$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$

$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$,则$\overrightarrow{CD}=$(__)

$A.\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

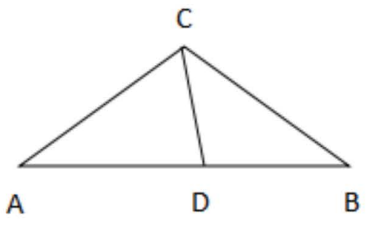
$B.\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

$C.\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$

$D.\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$

【直接记住结论解题】

首先我们通过数学三招的第一招翻译，将题目条件翻译成几何语言即画张图，便于我们理解



本质教育版权所有

然后根据我们的三角形内角平分线定理可知$\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|}=\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{DB}|}=2$

所以$|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{DB}|$，可推出$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

最后将我们的目标与其结合$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

$=b+\frac{2}{3}(a-b)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$

故选B

上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论，几乎是秒杀有关三角形内角平分线的相关题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

公式19：在ΔABC中，AD平分$\angle BAC$，AD交BC于D，则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

，大家记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-22

利用三角形关系速解四点共圆题目

作者：本质教育 韦卓甫

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

本质教育版权所有

2

解题公式

定理 22：

（1）同斜边的直角三角形的各顶点共圆

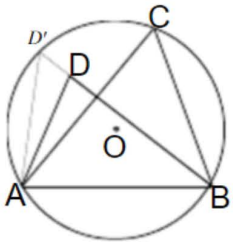
（2）同底共侧顶角相等的三角形的各顶点共圆

接下来我们证明和用图像理解一下这个公式

若我们已知：C,D 在线段 AB 的同侧，且 $\angle ACB = \angle ADB$

求证 ABCD 四点共圆

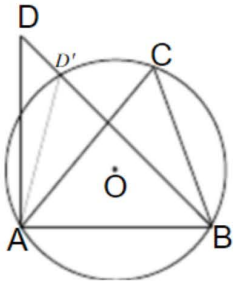
（1）若 D 点在圆 O 内部，如下图



延长 BD 交圆 O 于 D'点，连接 AD'. $\because \angle D' = \angle C$, 且 $\angle ADB > \angle D'$

$\therefore \angle ADB < \angle C$, 这与 $\angle ADB = \angle ACB$ 矛盾，因此 D 点不可能在圆 O 内部

（2）若 D 点在圆 O 外部，如下图



连接 AD,BD。则必有线段 BD 与圆 O 交于 D'点，连接 AD'

$\because \angle AD'B = \angle ACB$, 且 $\angle D < \angle AD'B$

$\therefore \angle D < \angle ACB$, 这与 $\angle ADB = \angle ACB$ 矛盾

因此 D 点不可能在圆 O 外，综上所述：D 点必在圆上

记忆窍门：

实际上即为圆周角性质的应用：在同一个圆内，若弦长相同，则对应的圆周角度数均相等。

本质教育版权所有

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些有关四点共圆证明和求解的题目，这实际上是一个初中定理，但是大多数的同学在做题目的时候会忘记这个比较简单的定理，特此补充。

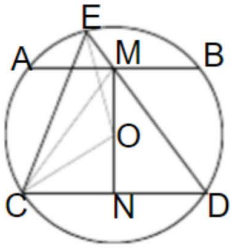
3

实战演示

接下来，我们用 1 道高考题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例：（2012•上海）已知 AB,CD 是圆 O 的弦，且 AB//CD,M 为 AB 中点，DM 交圆 O 于 E，求证 EMOC 四点共圆

解答：第一步，利用**本质教育第一招翻译**：将文字翻译成图形：



盯住目标，联想我们上面讲的定理，连 OE,OM,OC,MC,反向延长 OM 与 CD 交于 N，如上图所示

由题目已知条件得$AB//CD, AM=BM$

$\therefore$延长MO交CD于N点，MN为CD的中垂线

$\therefore MC=MD, \angle MCD=\angle MDC$

又$\because \angle CME=\angle MCD+\angle MDC=2\angle MDC$

$\therefore \angle CME=\angle COE$, 且$M,C$在线段$CE$同侧

所以 EMOC 四点共圆

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

定理 22：

（1）同斜边的直角三角形的各顶点共圆

（2）同底共侧顶角相等的三角形的各顶点共圆

大家记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-27

平面内到两定点连线互相垂直的点的轨迹

作者：本质教育 王子建

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

本质教育版权所有

2
解题公式

定理 27：平面内与两定点连线互相垂直的点的集合，是以两定点连线所成线段为直径的圆

通过这一简单的结论，在一些习题中遇到有关的题目，可以为我们提供解题的关键思路；只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

本质教育版权

我们先证明一下这个公式：

以平面内两定点AB为例，点M与AB两点的连线AM、BM相互垂直

在平面上建立直角坐标系

以AB的中点为原点，以AB方向为X轴方向，则A点的坐标（$-a$,0），

B点的坐标（a,0），设M的坐标（x, y）

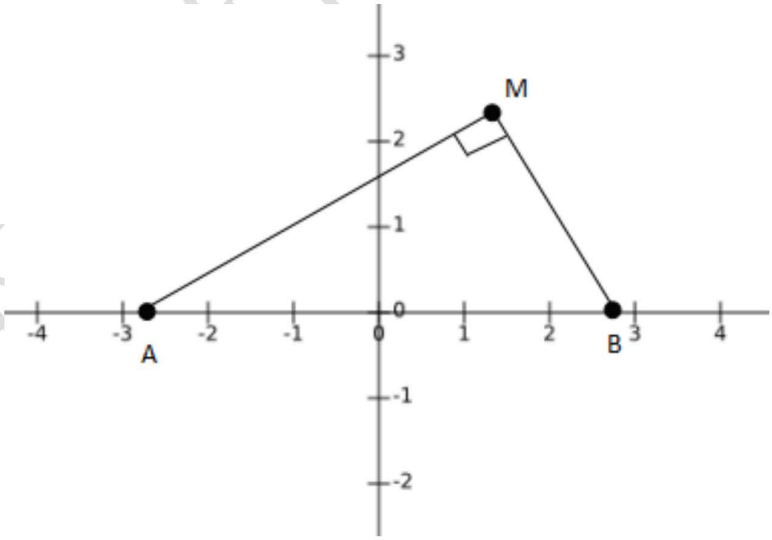
而AMB为直角三角形

$\therefore AB^2 = AM^2 + BM^2$

$\therefore (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$

$x^2 + y^2 = a^2$

此为M的轨迹方程，因此M的集合是以AB为直径半径为a的圆，



本质教育版权所有

3

实战演示

接下来，我们用一道例题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例1(2018秋·蚌埠期末)

过点P（0,3）作直线l:$(m+n)x+(2n-4m)y-6n=0$的垂线，

垂足为点Q，则点Q到直线$x-2y-8=0$的距离的最小值为_____

【直接记住结论解题】

首先看到这道题我们使用数学三招第一招**翻译**，将题中的直线在图上画出来，但是我们发现直线 l 比较复杂 ,难以直接的翻译出来 ;那么我们就应该去**化简**它，我们发现直线 l 的方程是一般式(ax+by+c=0) ,而我们常用的是点斜式(y=ax+b),因为点斜式的变量较一般式少，点斜式比一般式简单。那么我们就想到将直线 l 的一般式方程**化简**为点斜式方程。

首先将y变量移到一边，得到$(m+n)x-6n=(4m-2n)y$

当$4m-2n\neq 0$时，我们得到$y=\dfrac{m+n}{4m-2n}x-\dfrac{6n}{4m-2n}$

当$4m=2n$时，带回原式，得$3mx=12m\rightarrow x=4$（如图所示）

这时我们发现$x=4$比较特殊，那么我们运用特殊化的方法，

将$x=4$带入$4m-2n\neq 0$的一般情况中，得$y=\dfrac{m+n}{4m-2n}\bullet 4-\dfrac{6n}{4m-2n}=1$

我们发现无论直线l的斜率是多少或是不存在，直线l都必然经过点M（4,1）

由题中垂直可知$PQ\perp$直线l，且P（0,3）、M（4,1）为两个定点

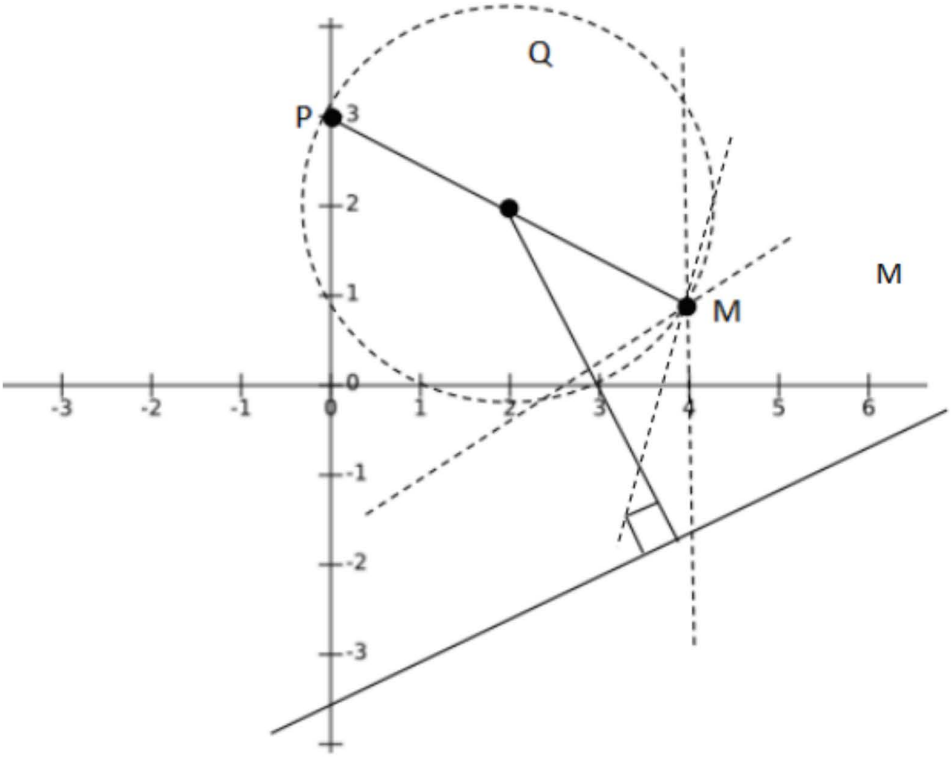
结合我们给出的定理：平面内到两定点连线相互垂直的点的轨迹为圆（以两定点为直径）

我们得出点Q的集合是以PM为直径，（2,2）为圆心半径为$\sqrt{5}$的圆

接着我们继续翻译，画出直线$x-2y-8=0$，

圆上一点到直线$x-2y-8=0$的最短距离为圆心（2,2）到该直线的距离减去半径长

即$\dfrac{|2-4-8|}{\sqrt{1+4}}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$



上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论，几乎是秒杀相关的题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

定理 27：平面内与两定点连线互相垂直的点的集合，是以两定点连线所成线段为直径的圆

，大家记住了吗？

欢迎添加泽宇老师本人微信参加 2 小时的互动直播试听课（免费，有效到这个连载结束为止）

微信号：**ZGSX02**

那些让你加快解题速度的高中数学公式-31

圆上任意一点到圆外某直线的距离最值

作者：本质教育 王子建

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

本质教育版权所有

2

解题公式

定理 31：圆上任意一点到圆外直线 l 的距离，最大为 d+r，最小为,d-r，d 为圆心到直线的距离，r 为半径

通过这一简单的结论，在一些习题中遇到有关的题目，可以为我们提供解题的关键思路；只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式：

(1) 证明圆上的任意一点到圆外直线 l 的距离，最大为 d+r

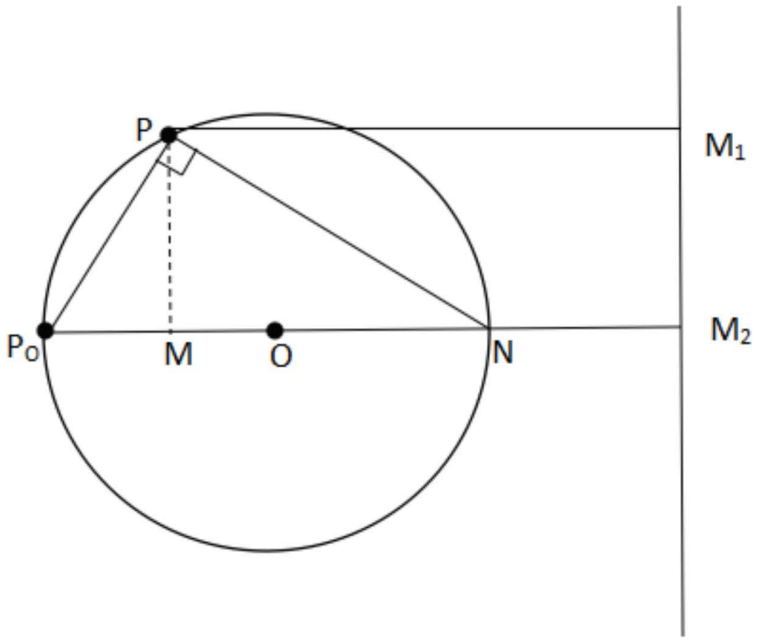
画一图，过圆心 O 作一直线垂直于右边的圆外直线 l，交圆于 P_O 和 N 点，垂足为 M_2，可知 P_O 到直线 l 的距离为 d+r（d 为圆心 O 到直线 l 距离即 OM_2 长）

再任取圆上一点 P（除 P_o 外）做直线 l 的垂线垂足为 M_1，P 到直线 l 距离为 PM_1 长

连接 PP_O 和 PN，构成圆内直角三角形，可$\angle P_OPN$ 为直角，$\angle P_OPM_1$ 为钝角；

过 P 做 P_OM_2 的垂线垂足为 M，**（由于$\angle PP_OM_2$ 为锐角所以点 M 在线段 PM_2 上）**可知 PMM_2M_1 为矩形，$PM_1=MM_2<P_OM_2$

即 $P_oM_2=d+r$ 为圆上任意一点到圆外直线 l 的距离最大值



(2) 证明圆上的任意一点到圆外直线 l 的距离，最小=d-r

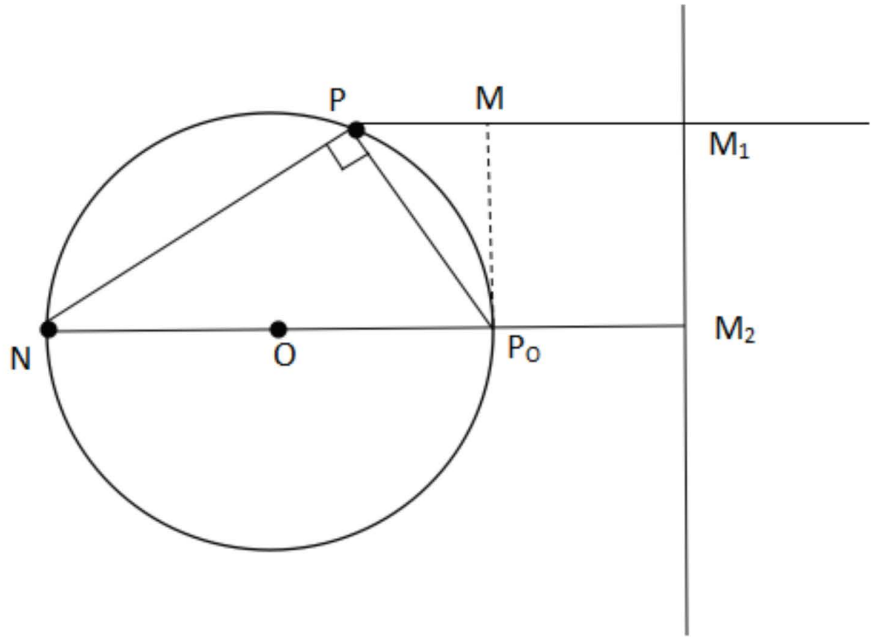
我们同样画一张图，过圆心 O 作一直线垂直于右边的圆外直线 l，交圆与 P_O 和 N 点，垂足为 M_2，可知 P_O 到直线 l 的距离为 d-r 即 P_oM_2 长（d 为圆心 O 到直线 l 距离即 OM_2 长）

再任取圆上一点 P（除 P_O 外）做直线 l 的垂线垂足为 M_1，P 到直线 l 距离为 PM_1 长

连接 PP_O 和 PN，构成圆内直角三角形，可$\angle P_OPN$ 为直角，$\angle NPM_1$ 为钝角

过 P_o 做 PM_1 的垂线垂足为 M，**（由于$\angle P_OPM_1$ 为锐角所以点 M 在线段 PM_1 上）**可知 $P_oMM_1M_2$ 为矩形，$PM_1>MM_2=P_OM_2$

即 P_oM_2=d-r 为圆上任意一点到圆外直线 l 的距离最小值



3

实战演示

接下来，我们用一道例题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

（2013 春•金安区校级月考）

若曲线 $y=2x-x^3$ 在横坐标为-1 的点处的切线为 l，则圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 上任意一点到直线 l 的距离的最小值为（　　）

A．$\frac{7\sqrt{2}}{2}-1$　　B．$\frac{9\sqrt{2}}{2}-1$　　C．$\frac{11\sqrt{2}}{2}-1$　　D．$\frac{7\sqrt{2}}{2}+1$

【直接记住结论解题】

首先运用数学三招的第一招**翻译**，将“曲线 $y=2x-x^3$ 在横坐标为-1 的点处的切线为 l”翻译成数学语言，

已知切点的横坐标为-1，切点即在切线上也在曲线上，故满足曲线方程，将横坐标 x=-1 代入曲线方程解出切点纵坐标 y=-1

为求得切线斜率，我们对曲线求导得 $y'=2-3x^2$，将 x=-1 代入曲线方程的导数式 y'

$=2-3x^2$，可以解出切线的斜率 k=y'=-1

再利用直线的斜截式方程得出切线的方程是 $y+1=-(x+1)$，

化简得切线的方程是 $x+y+2=0$

最后通过我们的**盯住目标**，目标是求圆上任意一点到直线 l 距离的最小值，立马联想到我们的定理 31：圆上的任意一点到圆外直线 l 的距离，最小为 d-r

但我们要先判断直线是否在圆外，我们需要算一下圆心（3，2）到直线 *l* 的距离，$d=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}>r=1$,故该直线在圆外，我们可以利用此公式

故 $d-r=\frac{7\sqrt{2}}{2}-1$

∴圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 上任意一点到直线 *l* 的距离的最小值为$\frac{7\sqrt{2}}{2}-1$

故选：*A*.

我们再复习一下我们的定理

定理 31：圆上任意一点到圆外直线 l 的距离，最大为 d+r，最小为,d-r，d 为圆心到直线的距离，r 为半径

，大家记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-32

利用对称轴性质加快解题速度

作者：本质教育 韦卓甫

本质教育版权所有

1

简单的题目
做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：
那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（**文章尾部附有往期文章链接**）

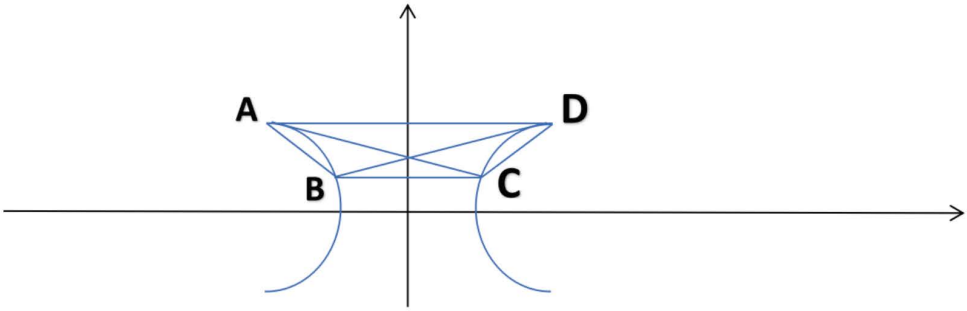
2

解题公式

定理 32：

如图，在两个轴对称图形上面各取一点，连线段最短的一定在对称的两点上。

即 $AC > AD$ 或 $AC > BC$ **，有一个成立。**



定理证明：

如上图所示，在以 y 轴为对称轴的图像上，取对称连线段 AD,BC，若要证明对称点连线段最短，则要证明 $AC > AD$ 或 $AC > BC$ **其中一个成立。**

首先，我们利用对称性，$\because AD \perp Y$轴, $BC \perp Y$轴，

$\therefore AD // BC$ ，有 ABCD 为等腰梯形。

$\angle BAD = \angle ADC$，且由等腰梯形的性质：若设$\angle BAD = \alpha$,则$\angle ABC = \pi - \alpha$

如图，若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，则 $\pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle ABC$为$\Delta ABC$中的最大角

则对边 $AC > BC$

同理，若 $\alpha > \frac{\pi}{2}$，我们设 $\angle ABC = \alpha$,则$\angle BAD = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\because \angle BCD = \angle ABC$

同理可得 $BD > BC$

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些立体几何和函数的题目。需要说明的是：这个性质主要依靠图像，因此希望大家灵活运用好本质教育数学第一招-翻译。

3

实战演示

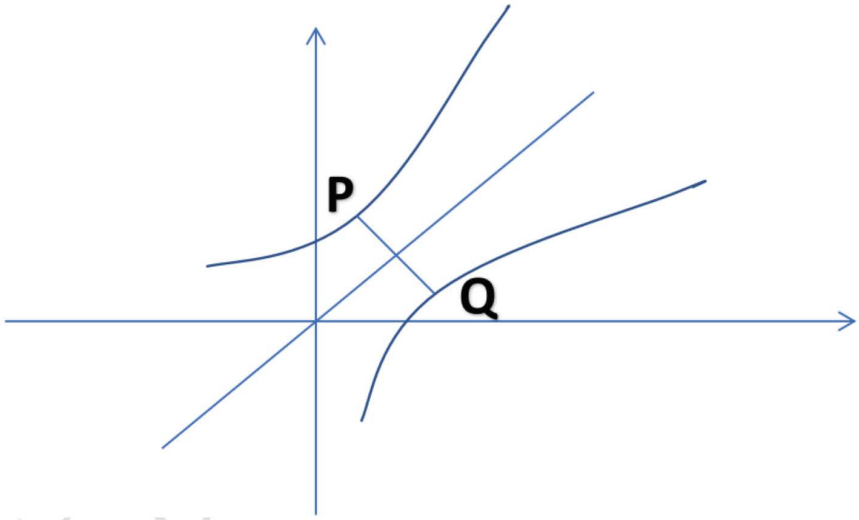
接下来，我们用 1 道高考题来展示一下这个公式的简便性与实用性，希望同学们仔细理解。

例 1（2012 全国）设点P在曲线$y=\frac{1}{2}e^x$上，点 Q 在曲线$y=\ln(2x)$上，则$|PQ|$最小值为（　　）

A．1－ln2　　B．$\sqrt{2}(1-ln2)$　　C．1+ln2 D．$\sqrt{2}(1+ln2)$

【分析】

首先利用本质教育第一招-翻译-画张图，发现这两者互为反函数关于$y=x$对称，如图所示



根据我们上面证明的定理：可以得出当P,Q关于$y=x$对称时，$|PQ|$最小（利用已知-对称性，画出等腰梯形，证明对角线必然大于短的底边）

此时，利用本质教育第三招-盯住目标

要求$|PQ|$的最小值，只要求出函数 $y=\frac{1}{2}e^x$上的点$P(x,\ \frac{1}{2}e^x)$到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{|\frac{1}{2}e^x-x|}{\sqrt{2}}$的最小值，设 $g(x)=\frac{1}{2}e^x-x$，利用导数可求函数 $g(x)$ 的单调性，进而可求 $g(x)$ 的最小值，即可求.

函数 $y=\frac{1}{2}e^x$上的点$P(x,\ \frac{1}{2}e^x)$到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{|\frac{1}{2}e^x-x|}{\sqrt{2}}$，

设 $g(x)=\frac{1}{2}e^{x}-x$（$x>0$），则 $g'(x)=\frac{1}{2}e^{x}-1$，

由 $g'(x)=\frac{1}{2}e^{x}-1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant ln2$，

由 $g'(x)=\frac{1}{2}e^{x}-1<0$ 可得 $0<x<ln2$，

∴函数 $g(x)$ 在（0，$ln2$）单调递减，在[$ln2$，+∞）单调递增，

∴当 $x=ln2$ 时，函数 $g(x)_{min}=1-ln2$，

$d_{min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$，

由图象关于 $y=x$ 对称得：$|PQ|$最小值为 $2d_{min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$.

故选：B.

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

复习一下，定理 32：
在两个轴对称图形上面各取一点，连线段最短的一定在对称的两点上

大家记住了吗？

本质教育版权所有

李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课