

李泽宇数学(初中/高中)

培养 **数学家思维**，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

(每周少量名额扫码加助教预约)



"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班：从100分提高到130+，
140+

基础班：平均分从50.4 提高到
101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课



"初中"课程(保130*150分制)

数学三招：灵活学习数学思维培养

费曼学习法：基础知识巩固

趣味化课堂：培养学生学习兴趣和
信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

那些让你加快解题速度的高中数学定理-3

利用三棱锥内切球的半径与三棱锥体积的关系式快速解题

作者：本质教育 王子建

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。从今天开始，我们将陆续地介绍这一系列的公式和定理：

定理 3：三棱锥内切球的半径与三棱锥体积的关系式为 $\frac{1}{3}RS = V$ ， V 是三棱锥体积， S 是三棱锥表面积



通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些出现在选择和填空题中的求三棱锥内切球半径的题目，只需要背下这个公式，并计算出三棱锥的体积及表面积就可以直接得出结论，大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式：

任意选取一个三棱锥，三棱锥的体积除了用体积公式表达，我们还能用内切球半径推导出三棱锥体积用内切球半径 R 表达的形式，因此我们设其内切球球心为 O ，则 O 到三棱锥四个面中的任一个面的距离为 R 。

之后由 O 为顶点，分别以三棱锥的四个面为底面，得到四个小三棱锥，高均为 R （内切球

球心到切面距离相等), 四个面面积总和为 S , 体积和为 V 。首先三棱锥体积有此四个小三

棱锥构成, 有 $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

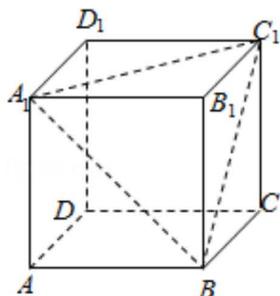
$$\text{而 } V_1 = \frac{RS_1}{3}, V_2 = \frac{RS_2}{3}, V_3 = \frac{RS_3}{3}, V_4 = \frac{RS_4}{3}$$

$$\text{所以 } V = \frac{RS_1}{3} + \frac{RS_2}{3} + \frac{RS_3}{3} + \frac{RS_4}{3}$$

有 $\frac{1}{3}RS = V$ 即三棱锥体积用内切球半径 R 表达的形式 (S 为四个面面积总和)

接下来, 我们用一道例题来展示一下这个公式的简便性。

例 1. 如图, 将一边为 1 的正方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥 $B_1 - A_1BC_1$, 则三棱锥 $B_1 - A_1BC_1$ 的内切球半径是_____.



【直接记住结论解题】

已知三棱锥内切球的半径与三棱锥体积的关系式为 $\frac{1}{3}RS = V$, 我们直接去寻找三棱锥的体积与四个面面积之和

三棱锥体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$, 四个面面积和

$$S = 3 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{由 } \frac{1}{3}RS = V \text{ 我们可立马得出内切球半径 } r = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论, 几乎是秒杀这种球三棱锥

内切球半径的题目（本人在 1 分钟内解决了这道例题），如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

三棱锥内切球的半径与三棱锥体积的关系式为 $\frac{1}{3}RS = V$ ， V 是三棱锥体积， S 是三棱锥表面积

，大家记住了吗？

本质教育版权所有

那些让你加快解题速度的高中数学公式-23

到不在同一直线上的三点距离相等的集合定理

作者：本质教育 王子建

1

简单的题目 做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（文章尾部附有往期文章链接）



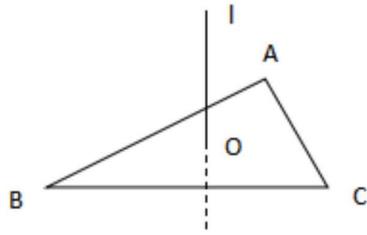
2

解题公式

定理 23 : 到不在同一直线上的三点距离相等的集合是过三点形成的三角形的外心，并垂直于该面的直线。

附：该定理对于找球心的问题是很有帮助的

示意图：(直线 l 过外心 O 且垂直于平面 ABC)



通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些习题中有关球心的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。



我们先**证明**一下这个公式：

在平面内到两定点距离相等的点的集合是线段的**垂直平分线**，那么我们升级到空间的尺度；在空间中到两定点距离相等的点的集合是线段的**垂直平分面**。

在下面给出的示意图中，到 AB 两点距离相等的点是 AB 的垂直平分线 l_1 ，到 BC 两点距离相等的点是 BC 的垂直平分线 l_2 ，两条垂直平分线的交点即为三角形 ABC 的外心。

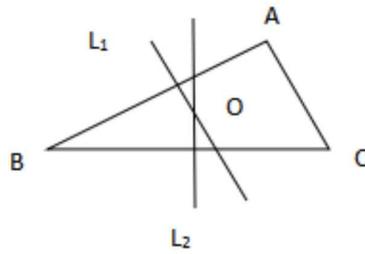


图 1

同样我们上升到空间中，因为到 AB 两定点距离相等的点的集合是线段 AB 的垂直平分面 α ，到 BC 两定点距离相等的点的集合是线段 BC 的垂直平分面 β 。由于两垂直平分面均垂直于底面，所以两垂直平分面的交线 l 也垂直于底面；由于在平面中两条垂直平分线的交点即为三角形 ABC 的外心，因此两面交线 l 在底面的投影点即是三角形 ABC 外心。

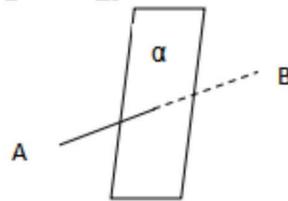


图 2

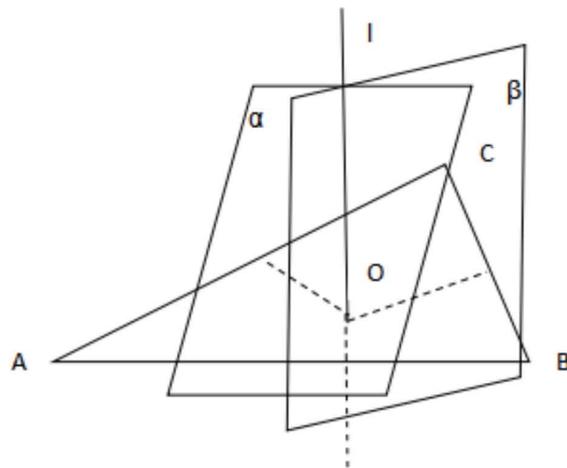


图 3 故两垂直平分面的交线 l 即为过 ABC 三点形成的三角形的外心 ,并垂直于该面的直线



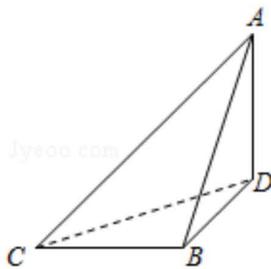
3

实战演示

接下来，我们用一道例题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例 1

(2018 春·南关区校级期末) 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $AD \perp$ 平面 BCD ， $BC \perp$ 平面 ABD ， $AD=BC=1$ ， $BD=\sqrt{2}$ ，若该四面体的四个顶点均在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 ()



A. $\frac{3\pi}{4}$

B. 2π

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. 4π

【直接记住结论解题】

首先运用数学三招中的盯住目标，我们的目标是球的表面积，联想相关公式 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2$ ，我们的目标转化为求球的半径；再结合已知我们可以得出，我们要确定球心 O 的位置才能得出半径 R

运用我们给出的定理 对于三角形 BCD ，到此三点距离相等的点的集合为过 BCD 三点形成的三角形的外心 O_1 ，并垂直于该面的直线。

由于 $BC \perp$ 平面 ABD , $BD \in$ 面 ABD , 因此 $BC \perp BD$,

$\triangle BCD$ 为直角三角形, CD 是斜边, 外心 O_1 恰好为 CD 中点

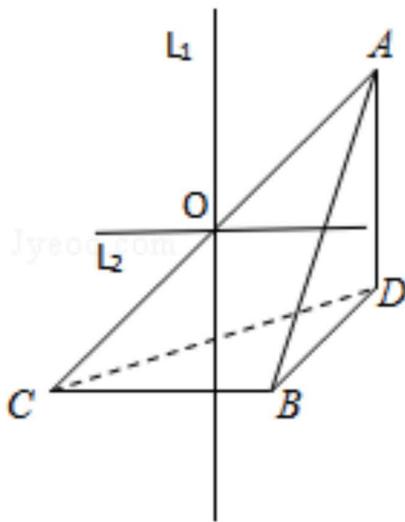
垂线 $l_1 \parallel AD$, 交 AC 于点 O

同理对于 $\triangle ABD$ 而言, 外心 O_2 恰为斜边 AB 中点, 垂线 $l_2 \parallel CB$, 也交 AC 于点 O

可知 O 为 AC 中点, O 是 l_1 与 l_2 的焦点, O 到 $ABCD$ 四点距离相等

故 O 就是我们要找的球心

半径 $R = \frac{1}{2}AC = 1$, $S_{\text{球}} = 4\pi$, 故选 D



上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论，几乎是秒杀有关球心的题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

定理 23：到不在同一直线上的三点距离相等的集合是过三点形成的三角形的外心，并垂直于该面的直线。

，大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-26

利用三正弦、三余弦定理快速解题

作者：本质教育 韦卓甫

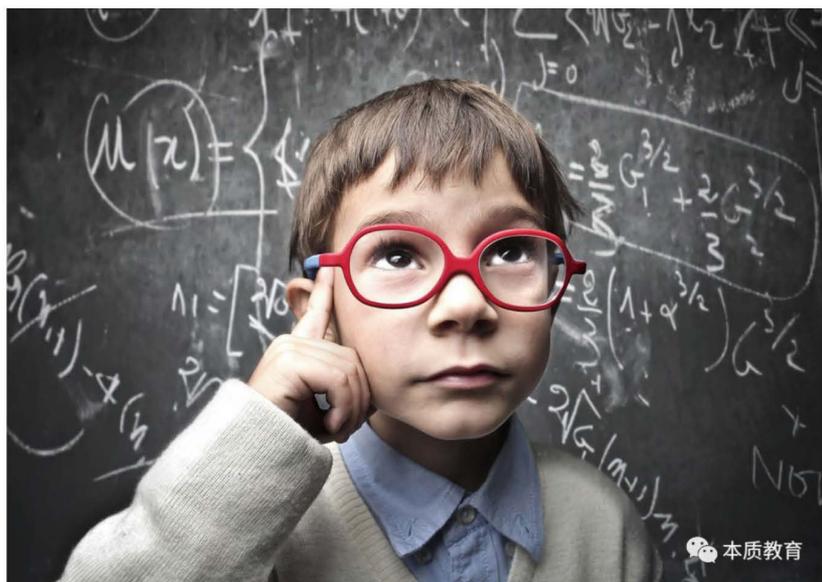
1

简单的题目 做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（文章尾部附有往期文章链接）



2

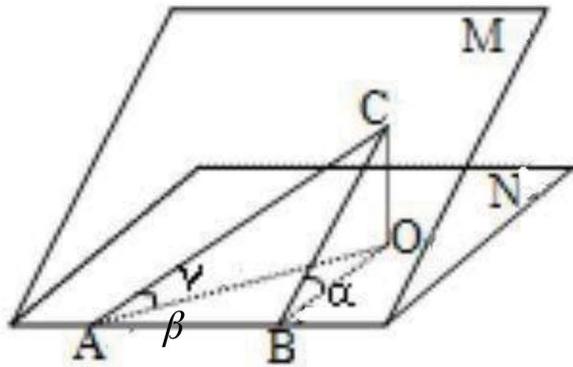
解题公式

定理 26 :

(1) 三正弦定理

若已知二面角其中一个半平面内某直线与二面角的棱所成的角,以及该直线与另一半平面所成的角,则可以求该二面角的正弦值

设二面角 $M - AB - N$ 的度数为 α , 在平面 M 上有一条射线 AC , 它和棱 AB 所成角为 β , 和平面 N 所成的角为 γ , 则 $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ (如图)



三正弦公式示意图

定理证明：

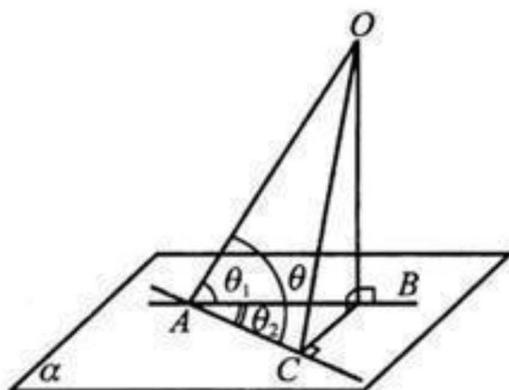
如上图，过 C 作 $CO \perp$ 平面 N 于点 O ，过 O 作直线 $OB \perp$ 二面角的棱于点 B ，连 OA ， CB ，则易知 $\triangle CAO$ ， $\triangle CBO$ ， $\triangle ABC$ 均为直角三角形。

于是 $\sin \gamma = \sin \angle CAO = \frac{CO}{AC}$ ， $\sin \alpha = \sin \angle CBO = \frac{CO}{BC}$ ， $\sin \beta = \sin \angle BAC = \frac{BC}{AC}$

由此容易推得 $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$

(2) 三余弦定理

设 A 为面上一点，过 A 的斜线 AO 在面上的射影为 AB ， AC 为面上的一条直线，那么 $\angle OAC$ ， $\angle BAC$ ， $\angle OAB$ 三角的余弦关系为： $\cos \angle OAC = \cos \angle BAC \cdot \cos \angle OAB$ ($\angle BAC$ 和 $\angle OAB$ 只能是锐角)

**定理证明：**

如上图，已知 OA 是面 α 的一条斜线， $OB \perp \alpha$ 。在 α 内过 B 作 $BC \perp AC$ ，垂足为 C ，连接 OC 。
 OA 和 α 所成角 $\angle OAB = \theta_1$ ， AC 和 AB 所成角 $\angle BAC = \theta_2$ ， OA 和 AC 所成角 $\angle OAC = \theta$ 。求证
 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$

证明：

$\because OB \perp \alpha$

$\therefore BC$ 是 OC 在 α 上的射影

$\because BC \perp AC \quad \therefore OC \perp AC$ (三垂线定理)

由三角函数的定义可知 $\cos \theta_1 = \frac{AB}{OA}$, $\cos \theta_2 = \frac{AC}{AB}$, $\cos \theta = \frac{AC}{OA}$

$\therefore \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 = \frac{AB}{OA} \cdot \frac{AC}{AB} = \cos \theta$

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些立体几何的题目。如果将三正弦定理和三余弦定理联合起来，用于解答立体几何综合题，你会发现出乎意料地简单！

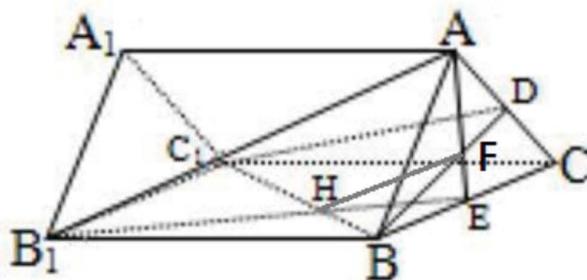


3

实战演示

接下来，我们用 1 道经典的高考题（后期高考立体几何大多以此为母题）来展示一下这 2 个公式的简便性与实用性，希望同学们仔细理解。

例1 （1994 全国高考理科数学 23 题）如图，已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱， D 是 AC 中点，若 $AB_1 \perp BC_1$ ，求以 BC_1 为棱， DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角的度数



例1题图

分析：

首先，使用本质教育第三招-盯住目标，要求二面角的度数，我们通常先找底面的垂线，然后利用三垂线定理画出二面角的平面角。而这里已知面 $ABC \perp BCC_1B_1$ ，因此我们取BC中点E，连 B_1E 交 BC_1 于H，连接AE，则 $AE \perp BCC_1B_1$

$$\because BC_1 \perp AE, BC_1 \perp AB_1 \Rightarrow BC_1 \perp AB_1E \Rightarrow BC_1 \perp B_1E$$

$\angle FHE$ 即为我们要求的二面角的平面角。

但是直接求这个角需要求FH的长度，比较麻烦，我们于是联想到三正弦定理：

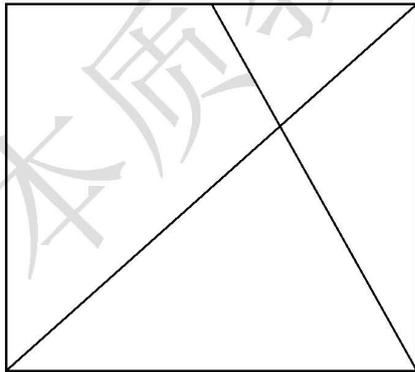
$$\because \sin \angle FHE = \frac{\sin \angle FBE}{\sin \angle HBF}, \sin \angle FBE = 30^\circ$$

因此我们的新目标变为： $\sin \angle HBF$

而这时联想到三余弦定理，即：

$$\because \cos \angle HBF = \cos \angle FBE \times \cos \angle HBE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle HBE$$

我们的下一个目标就是 $\cos \angle HBE$ ，而这个可以放在平面 BCC_1B_1 中进行，如图：



设 $\angle HBE = \theta, EB = a$ ，因此 $\angle EB_1B = \theta$

所以 $BB_1 = a \cot \theta$

$$\because \frac{BC}{CC_1} = \cot \theta \Rightarrow CC_1 = BB_1 = 2a \times \tan \theta$$

$$\therefore a \cot \theta = 2a \times \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

这题实际已经解决了，代入回去：

$$\cos \angle HBF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \angle FHE = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle FHE = 45^\circ$$

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

复习一下，定理 26：

(1) 若二面角 $M - AB - N$ 的度数为 α ，在平面 M 上有一条射线 AC ，它和棱 AB 所成角为 β ，和平面 N 所成的角为 γ ，则 $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$

(2) 设 A 为面上一点，过 A 的斜线 AO 在面上的射影为 AB ， AC 为面上的一条直线，那么 $\angle OAC, \angle BAC, \angle OAB$ 三角的余弦关系为： $\cos \angle OAC = \cos \angle BAC \cdot \cos \angle OAB$

大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-28

利用公式解决正四面体内切球和外接球的问题

作者：本质教育 王馨逸

1

简单的题目 做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（文章尾部附有往期文章链接）



2

解题公式

定理 28 :正四面体的棱长为 a , 则正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

外切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

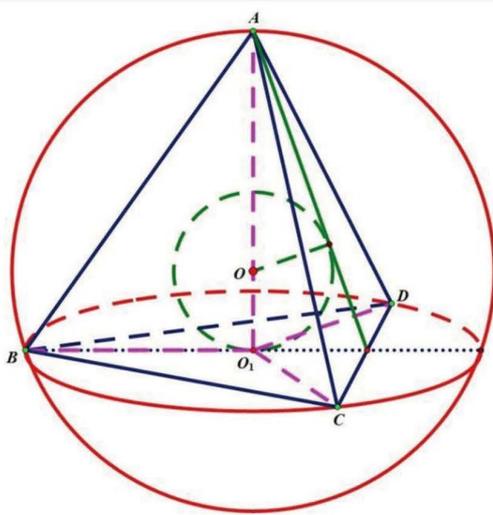


通过这一简单的结论,我们可以秒杀一些在选择和填空题中有关正四面体内切球和外接球的题目,只需要背下这个公式,即可做到秒杀该类型的题目,大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式:

内切球与外接球半径的关系:

如图所示



在正四面体 ABCD 中, O 为外接球圆心, 设外接球的半径为 R , 内切球的半径为 r , 正四面体高为 h

$\because O$ 为外接球圆心

$\therefore O$ 到点 B, C, D 的距离相等

\therefore 点 O 在平面 BCD 内的射影即 O_1 到 B, C, D 的距离相等 $O_1B = O_1C = O_1D$

又 $\because VBCD$ 为正三角形

$\therefore O_1$ 为 $VBCD$ 的中心 (重心, 外心, 内心)

$\therefore AO_1 \perp$ 平面 BCD

$\therefore O$ 在高 AO_1 上

同理 O 也在其他面的高上

$\therefore OA = OB = OC = OD$

$\therefore O$ 到四面体各面的距离相等

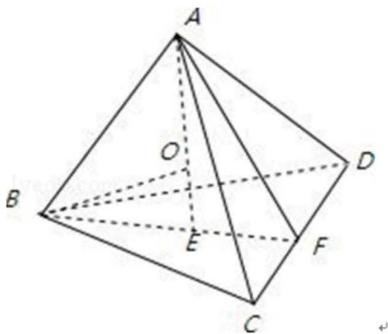
即 O 也为正四面体内切球的球心

又 $\because OO_1 = r, OA = R, AO = h$

$\therefore R + r = h$

求正四面体的高:

如下图



F 为 CD 中点, AE 为正四面体 $ABCD$ 的高

$\therefore AB = AC = AD$

$\therefore CE = BE = ED$ (斜线相等,则其射影也相等),

$\therefore E$ 为正 $VBCD$ 中心 (重心)

又 $\because VBCD$ 是正三角形且 F 为 CD 中点, 正四面体棱长为 a

$\therefore BF \perp CD$

$$\therefore BF = AF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

又 $\because E$ 为正 $VBCD$ 重心

$$\therefore EF = \frac{1}{3}BF = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

在 $RtVBCD$ 中

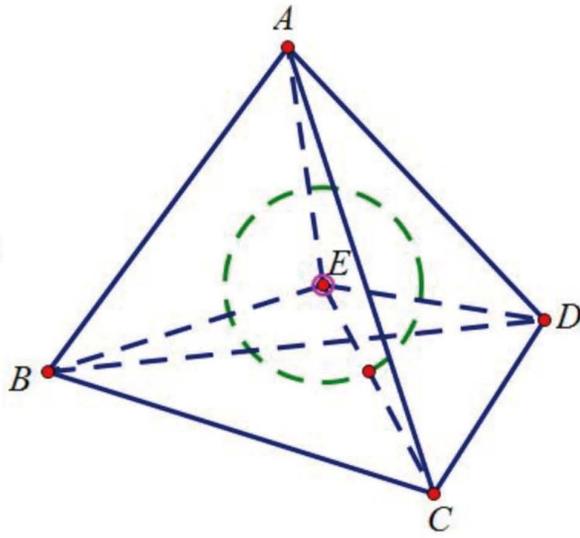
$$h = AE = \sqrt{AF^2 - EF^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

\therefore 在棱长为 a 的正四面体中高 h 为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

求内切球的半径:

如图所示:在正四面体 $ABCD$ 中,作 E 为内切球圆心,连接 AE, ED, EC, BE 。

设内切球半径为 r , 正四面体棱长为 a , 高为 h 。



根据等体积法

$$V_{A-BCD} = V_{E-ABD} + V_{E-ABC} + V_{E-ACD} + V_{E-BCD}$$

$$\frac{1}{3} \cdot S_{VBC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{VBD} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot S_{VBC} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot S_{VCD} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot S_{VBCD} \cdot r$$

\because 四面体 ABCD 为正四面体

$$\therefore S_{VBD} = S_{VBC} = S_{VCD} = S_{VBCD}$$

$$\therefore h = 4r \text{ 即 } r = \frac{h}{4}$$

$$\therefore \text{内切圆半径 } r = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$

求外接球半径：

$$\therefore R + r = h$$

$$\therefore R = h - r = \frac{\sqrt{6}}{3} a - \frac{\sqrt{6}}{12} a = \frac{\sqrt{6}}{4} a$$

综上所述:棱长为 a 正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$, 外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$



3

实战演示

接下来，我们用两道例题来展示一下这个公式的简便性与实用性。

例 1 :

在正四面体 $ABCD$ 中, 其棱长为 a , 若正四面体 $ABCD$ 有一个内切球, 则这个球的表面积为_____.

【直接记住结论解题】

用数学三招第三招**盯住目标**: 我们的目标是求正四面体内切球的表面积, 所以我们联想有关的定理和公式

定理 28 : 正四面体的棱长为 a , 则正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

外切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

球的表面积公式: $S = 4\pi r^2$, r 为球的半径

\therefore 内切球的半径为 $R = \frac{\sqrt{6}}{12}a$

\therefore 表面积为 $S = 4\pi \frac{\sqrt{6}^2}{12} = \frac{\pi}{6}a^2$

例 2:

(2018·新华区校级模拟) 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长均为 a , O 为正四面体 $P-ABC$ 的外接球的球心, 过点 O 作平行于底面 ABC 的平面截正四面体 $P-ABC$, 得到三棱锥 $P-A_1B_1C_1$ 和三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$, 那么三棱锥 $P-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为_____.

【直接记住结论解题】

解：先用数学三招第一招翻译：

画出图形

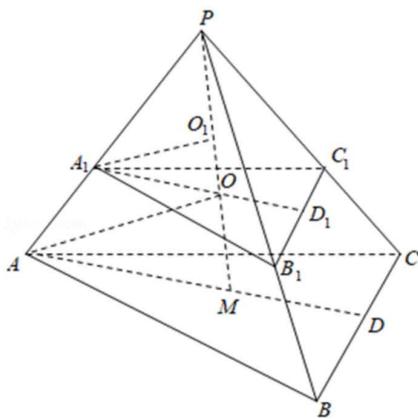
取 BC 中点 D , B_1C_1 中点 D_1 , 连结 AD 、 A_1D_1 , 过点 P 作 PM 平面 ABC , 交 AD 于 M , 交 A_1D_1 于 O ,

连结 OA , 设三棱锥 $P - A_1B_1C_1$ 的外接球球心为 O_1 ,

则 O_1 在 PM 上, 连结 A_1O_1 , 则 $O_1A_1 \parallel OA$,

OA 是球 O 的半径, 记为 R , A_1O_1 是球 O_1 的半径,

记为 r ,



再用数学三招第三招盯住目标：我们的目标是求三棱锥 $P - A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积

我们联想球的表面积公式 $S = 4\pi r^2$, r 为球的半径。现在目标转化为求三棱锥 $P - A_1B_1C_1$ 的外接球半径 r 。

$$\text{又} \because \frac{OA_1}{OA} = \frac{PA_1}{PA} = \frac{PO}{PM},$$

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{PO}{PM} = \frac{R}{PM}$$

所以我们的目标再转化为求 R 和 PM 的值

我们联想有关的定理

定理 28：正四面体的棱长为 a , 则正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 内切球半径为

$$\frac{\sqrt{6}}{12}a, \text{ 外切球半径为 } \frac{\sqrt{6}}{4}a,$$

∵ 正四面体 $P-ABC$ 的棱长均为 a

$$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \text{ PM} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\therefore r = \frac{R^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a \times \frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{3\sqrt{6}}{16}a,$$

∴ 三棱锥 $P-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \times \left(\frac{3\sqrt{6}}{16}a\right)^2 = \frac{27\pi}{32}a^2.$$

故答案为: $\frac{27\pi}{32}a^2$.

上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论并熟悉它的证明过程，几乎是秒杀有关正四面体内切球和外接球的题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

定理 28 : 正四面体的棱长为 a , 则正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

外切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

, 大家记住了吗?

那些让你加快解题速度的高中数学公式-30

利用面积射影定理快解立体几何题目

作者：本质教育 韦卓甫

1

简单的题目 做得又快又对

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效，从今天开始我们将陆续介绍这些公式及定理。（文章尾部附有往期文章链接）



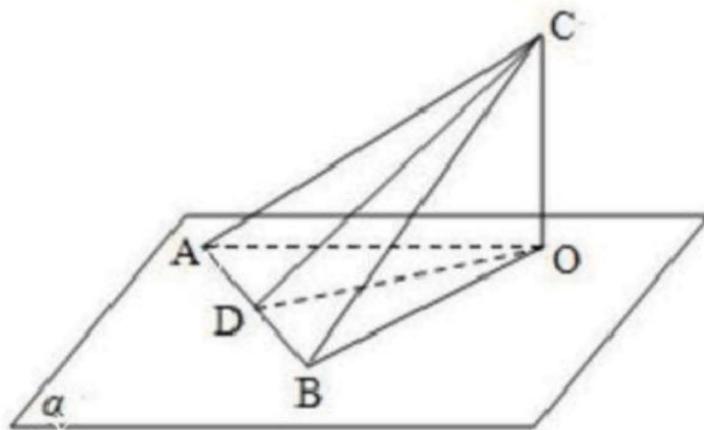
2

解题公式

定理 26：面积射影定理

如图，设平面 α 外的 $\triangle ABC$ 在平面 α 内的射影为 $\triangle ABO$ ，分别记 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle ABO$

的面积为 S 和 S' ，记 $\triangle ABC$ 所在平面和平面 α 所成的二面角为 θ ，则
$$\cos\theta = \frac{S'}{S}$$



定理证明：

思路：因为射影就是将原图形的长度（三角形中称高）缩放，所以宽度是不变的，又因为平面多边形的面积比=边长的平方比。所以就是图形的长度（三角形中称高）的比。那么这个比值应该是平面所成角的余弦值。

在两平面中作一直角三角形，并使斜边和一直角边垂直于棱（即原多边形图的平面和射影平面的交线），那么三角形的斜边和另一直角边就是其多边形的长度比，即为平面多边形的面积比，而将这个比值放到该平面三角形中去运算即可。

证明：如上图，作 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高 CD ，垂足为 D ，连 OD ，易知 $OD \perp AB$ ，故 $\angle CDO$ 即为二面角 $C-AB-O$ 的平面角，即 $\angle CDO = \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{OD}{CD} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot OD}{\frac{1}{2} AB \cdot CD} = \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S'}{S}$$

通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些立体几何的题目。需要说明的是：理科生使用建系解题更快，但是对于没有学习建系知识的文科生，记住这一结论可以有效的解决类似的题目



3

实战演示

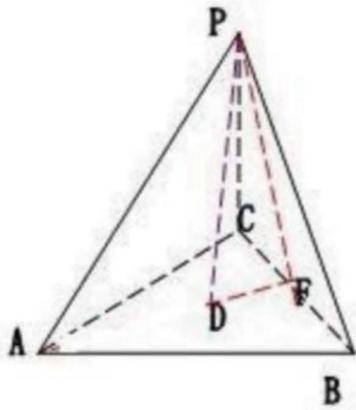
接下来，我们用 1 道高考题来展示一下这个公式的简便性与实用性，希望同学们仔细理解。

例2 (2015 全国) 已知三棱柱 $P-ABC$ 中各侧面与底面所成的二面角都是 60° ，且 $\triangle ABC$ 三边长分别为 7、8、9，则三棱锥的侧面积为 ()

A. $24\sqrt{5}$ B. $8\sqrt{5}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $12\sqrt{5}$

分析：

首先，使用本质教育第 1 招-翻译，将图像画出来，如图所示



此时，只需要使用本质教育第 3 招-盯住目标，联想上述的公式：

$$\frac{S_{\text{底}}}{S_{\text{侧}}} = \cos 60^\circ$$

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长为 7, 8, 9

联想我们前面第 13 篇文章中讲过的三角形面积的高中包含的所有求法—可选取海伦公式

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 12, \text{ 且 } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12\sqrt{5}$$

$\therefore S_{\text{侧}} = 2 \times 12\sqrt{5} = 24\sqrt{5}$ ，题目选 A.

如果利用好这个公式，我们就能多一条思考的路径，可简化很多繁琐的运算，即可迅速解出答案！

复习一下，定理 30：

设平面 α 外的 $\triangle ABC$ 在平面 α 内的射影为 $\triangle ABO$ ，分别记 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle ABO$ 的面

积为 S 和 S' ，记 $\triangle ABC$ 所在平面和平面 α 所成的二面角为 θ ，则 $\cos \theta = \frac{S'}{S}$

李泽宇数学(初中/高中)

培养 **数学家思维**，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

(每周少量名额扫码加助教预约)



"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班：从100分提高到130+，
140+

基础班：平均分从50.4 提高到
101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课



"初中"课程(保130*150分制)

数学三招：灵活学习数学思维培养

费曼学习法：基础知识巩固

趣味化课堂：培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课