李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到 101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

那些让你加快解题速度的高中数学公式-1

奇函数在求最值中的应用

作者：本质教育

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。从今天开始，我们讲陆续地介绍这一系列的公式和定理：

定理 1：若奇函数存在最值，则其最大值和最小值之和为 0

首先，不一定所有的奇函数都有最值，例如$y=x^3$就不存在最值。但若最值存在，例如最小值存在为m，那么由于其是中心对称图形，其最大值一定存在且最大值$M=-m$，因此我们得出上面的结论。

接下来，我们通过一道高考真题演示奇函数的这一性质在求最值中的特殊作用。

例 1（2012 高考题）设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为M，最小值为m，则 $M+m$=_____ .

【分析】先化简：

$$f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=\frac{x^2+2x+1+\sin x}{x^2+1}=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$$

利用本质教育的第三招盯住目标，我们求函数的最大值和最小值之和，那么如果我们仅仅盯

住“最大值”或者“最小值”这几个字，我们能联想的方法就会局限于：画图，求导数和不等式。那么我们会发现这道题目非常困难，计算复杂。

通过“最大值和最小值之和”联想上面的定理：**若奇函数存在最值，则其最大值和最小值之和为 0**，而我们原函数正好是常数+奇函数，我们可以利用这个定理：

【解答】

解：函数可化为 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，

令 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，则 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$ 为奇函数，

$\therefore g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值与最小值的和为 0．

$$\therefore M+m=\max\big(f(x)\big)+\min\big(f(x)\big)=1+\max\big(g(x)\big)+1+\min(g(x))=2+0=2$$

最后回想，我们会发现这个看似用常规方法难以解决的题目，如果利用好奇函数的性质，就将被快速解答！

若奇函数存在最大值和最小值，则其之和为 0，大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-7

非直角三角形内角的正切值关系

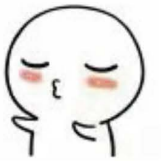
作者：本质教育 王子建

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。从今天开始，我们讲陆续地介绍这一系列的公式和定理：

公式 7：在任意非直角 ΔABC **内，都有** $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$



通过这一简单的结论，我们可以秒杀一些在选择和填空题中 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 同时出现的题目，只需要背下这个公式，即可做到秒杀该类型的题目，大大缩短了做题时间。

我们先**证明**一下这个公式：

在任意非直角 ΔABC **内**

有 $A+B+C=\pi$

$\therefore A+B=\pi-C$

$\therefore \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C$$

$\therefore \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\cdot\tan B)$

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

如何快速记忆这个公式呢？

此公式左右的构成元素是一样的，显得比较美丽对称，大家也可以这么来记忆“非直角三角形中，内角 ABC 的正切值乘与加等价”

接下来，我们用两道例题来展示一下这个公式的简便性。

例 1.（2017 春•黄骅市校级期中）

在ΔABC中，$\tan A, \tan B, \tan C$依次成等差数列，则B的取值范围是（____）

$A.(0,\frac{\pi}{3}]U(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$

$B.(0,\frac{\pi}{6}]U(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$

$C.[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$

$D.[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

【直接记住结论解题】

由题易知，这是非直角三角形

已知公式 $tanA+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

再通过数学三招第一招翻译，将文字“依次成等差数列”

化为 $\tan A+\tan C=2\tan B$，并与本公式联立得

$3\tan B=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

$\tan A\cdot\tan C=3$

（这里也推出$\tan A,\tan C>0$，且我们还知道$2\tan B=\tan A+\tan C$

而目标是求$\tan B$的最小值，那么我们可以利用均值不等式）

$\therefore 2\tan B=\tan A+\tan C\geq 2\sqrt{\tan A\cdot\tan C}=2\sqrt{3}$

（$\tan A=\tan C$时取等，此时是等边三角形）

即$\tan B\geq\sqrt{3}$

故选 D

例 2.

在钝角三角形ABC中，有$k=\dfrac{\sqrt{3}|\tan A\tan B\tan C|}{\tan A+\tan B+\tan C}$,则实数$k$的值为_____

【直接记住结论解题】

已知 $tanA+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

由于是钝角三角形，那么 $\tan A,\tan B,\tan C$ 中必有一个为负，因此绝对值去掉得负号，直接得出 k=-$\sqrt{3}$

上面的解题过程可谓是“神速”显然我们直接记住这个结论，几乎是秒杀这种 $\tan A,\tan B,\tan C$ 同时出现的题目，如果利用好这个公式，我们几乎不需要思考，即可迅速解出答案！

公式 7：在任意非直角 ΔABC 内，都有 $tanA+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

，大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-10

利用“切线不等式”解决不等式与导数结合的题目

作者：本质教育

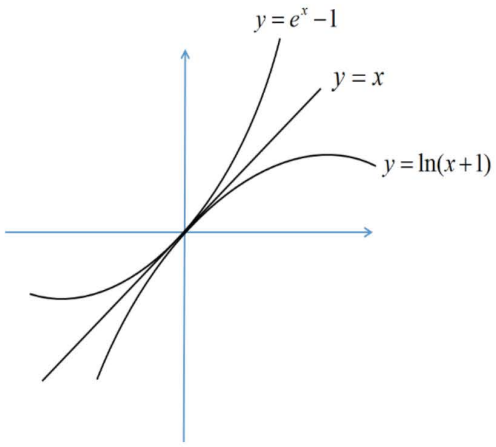
对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。从今天开始，我们讲陆续地介绍这一系列的公式和定理：

定理 10——“切线不等式”：$e^x - 1 \geq x \geq ln(x+1)$，两个等号均在$x = 0$处取得。

这个不等式在高考导数题中可以解决一些常规思路下很难的题目，也非常好记，画一张图帮助大家理解，顾名思义，其实$y = x$是$y = e^x - 1$与$y = ln(x+1)$在$x = 0$处的切线，再结合同学们学过的指数函数和对数函数，平移一下，很容易就记住这个图了。



我们来证明一下这个不等式：

令$f(x)=e^x-1-x$，$f(x)$定义域是R，$f'(x)=e^x-1$

则$f'(x)$在$(-\infty,0)$上为负，在$(0,+\infty)$上为正，

即$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$f(x)\geq f(0)=1-1-0=0$

所以$e^x-1\geq x$

同理，令$g(x)=x-\ln(x+1)$，定义域为$(-1,+\infty)$，$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}$

则$g'(x)$在$(-1,0)$为负，在$(0,+\infty)$上为正，

即$g(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)\geq g(0)=0-0=0$

所以$x\geq ln(x+1)$

则有：$e^x-1\geq x\geq ln(x+1)$，两个等号均在$x=0$处取得

接下来，我们用一道例题来展示一下这个公式的简便性。

考试时，记得如果是大题，必须要在答题卡上证明切线不等式中我们需要用到的部分。此外，我们可以进行各种变形得出推论，比如用$x-1$代替x，用含有x的式子代替x，得到更多的不等式，同学们可以根据目标自行变换，注意取等号的条件即可。

例（2018•郑州二模）已知函数$f(x)=e^x-x^2$.

（Ⅰ）求曲线$f(x)$在$x=1$处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时，$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x} \geq lnx+1$.

分析

第一问很简单，基础操作，不会的同学回去看课本好好复习怎么求切线。

第二问，这个不等式的常规证明挺复杂的，对标准答案感兴趣的同学搜搜题即可看到。

如果我们脑子里有切线不等式的知识储备的话，利用本质教育第三招盯住目标，

不等号右边是$lnx+1$，很像我们切线不等式的变形。

（记住，先证明切线不等式）令$g(x)=x-ln\,(x+1)$，当 $x\geq 0$ 时，则$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}\geq 0$，

故$g(x)$在 $x\geq 0$ 时单调递增，故$g(x)\geq g(0)=0-ln1=0$，故$x\geq 0$时，$x\geq ln\,(x+1)$,

同理$-1<x<0$时，$x>ln\,(x+1)$

故$x\geq ln\,(x+1)$在$(-1,+\infty)$恒成立，在$x=0$时等号成立

根据我们的目标，利用切线不等式构造$lnx+1$出来，令$x=x-1$，则$x-1\geq lnx$，

所以$x\geq lnx+1$，显然$x=1$时等号成立

那回到这个题，如果我们能证明$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x}\geq x$成立，是不是也就能证明我们的目标了。

因为$x>0$，则相当于证明：$e^x+(2-e)x-1\geq x^2$

令$h(x)=e^x+(2-e)x-1-x^2$，则我们需要证明$h(x)\geq 0$，

先验证极端值，$h(0)=0$，

那么接下来就是一些常规操作去求导求最值了：

$h'(x)=e^x+2-e-2x$，无法直接判断正负，则需要求二次导，

$h''(x)=e^x-2$，显然在$(0,ln2)$小于 0，在$(ln2,+\infty)$大于 0，

$h'(x)$在$(0,ln2)$上单调递减，在$(ln2,+\infty)$上单调递增，

又

$h'(0)=3-e>0$，$h'(1)=0$，$0<ln2<1$，$\therefore h'(ln2)<h'(1)=0$，

所以，存在$x_0\in(0，ln2)$，使得$h'(x_0)=0$，

所以，当$x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$时，$h'(x) > 0$；当$x \in (x_0, 1)$时，$h'(x) < 0$，

故

$h(x)$在$(0, x_0)$上单调递增，在$(x_0, 1)$上单调递减，在$(1, +\infty)$上单调递增，

又$h(0) = h(1) = 0$，则$h(x)$在$(0, +\infty)$的最小值为$h(1) = 0$

$\therefore h(x) = e^x + (2-e)x - 1 - x^2 \geq 0$，

当且仅当$x = 1$时取等号，故$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x} \geq x$，$x > 0$.

再结合我们一开始证明的切线不等式变形$x \geq lnx + 1$，所以

$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x} \geq lnx + 1$，得证。

回来想想我们的解题过程，如果我们没有切线不等式的基础不等式，这个题做得出来吗？肯定是做得出来的，但是需要你去大量的构造(很多导数大题证明不等式都无法直接移项求导，需要转化)，去试错，去尝试通过导数的应用去求最值进而证明不等式；相反，如果你记得切线不等式，那么我们只需要一步简单的放缩即可以通过简单的移项和常规求导操作即可解决（近些年利用切线法解决导数题目越来越热门，同学们可以留意我们后面的更新）。

定理 10——切线不等式：$e^x - 1 \geq x \geq ln(x+1)$，两个等号均在$x = 0$处取得。

大家记住了吗？

那些让你加快解题速度的高中数学公式-14

利用“对数平均不等式”解决导数结合不等式的题目

作者：本质教育

对于任何考试（例如高考），本质教育有一条重要的原则：

那些考试拿高分的，一定是简单的题目做得又快又对，这样他们才有时间去思考难题。

因此，适当地掌握一些教材中没有提到，但是可以加速解题过程的公式和定理，对提高解题速度，尤其是选择和填空题的解题速度极为有效。从今天开始，我们讲陆续地介绍这一系列的公式和定理：

定理 14：对数平均不等式：若 $x_1 > x_2 > 0$，则 $\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2} > \sqrt{x_1x_2}$

（式子可以进行分子分母颠倒、指数化，或者用含有x的式子代替x，同学们可以根据题目需要大胆尝试，感兴趣的同学们可以去翻看近 5 年各大省市的导数压轴题，有一定比例是以对数平均不等式为背景出题的，有一些隐藏得更深一点，需要对该不等式进行变形）

其实这个不等式是从对数平均值的不等式链中截取出来的，高考中常考的也就是这一部分，非常好记：**对于两个不等的正数，其对数平均数大于其几何平均数**。这里也给大家科普一下对数平均数和几何平均数（以两个不等的正数为例），**对数平均数：这两个数的差与它们的自然对数的差之比；几何平均数：这两个数的乘积开二次方。**

通过这一不等式，我们相当于多了一条放缩的路径，并且，有一些导数压轴题就是以该不等式为命题背景的，如果我们有这个知识储备，就可以避免掉导数大题中繁琐的

讨论。

我们先证明一下这个不等式：

若$x_1 > x_2 > 0$，

要证 $\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2} > \sqrt{x_1x_2}$，即证：$lnx_1 - lnx_2 < \frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$，

即证明：$ln\frac{x_1}{x_2} < \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$

令$t = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$，则$t > 1$，则只需证明：$2lnt - t + \frac{1}{t} < 0$

令$f(t) = 2lnt - t + \frac{1}{t}$（$t > 1$），$f(1) = 0$，

$f'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-(t+1)^2}{t^2} < 0$，所以$f(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

故$f(t) < f(1)$，则$f(t) = 2lnt - t + \frac{1}{t} < 0$ 恒成立，

根据以上知：$\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2} > \sqrt{x_1x_2}$ 成立

（这个公式的证明也是很有代表意义的，化双变量为单变量，同时同学们在应用这个公式时最好先证明一下）

下面我们以 2018 年全国一卷的导数压轴题为例看一下这个公式的巧妙。

例．（2018•新课标Ⅰ）已知函数$f(x) = \frac{1}{x} - x + alnx$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$存在两个极值点x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < a - 2$.

分析

（1）第一问不难，利用本质教育第三招盯住目标，近乎模板式的求导、讨论a，根据不同的a的范围求极值、最值、单调性。下面给出标准的解答过程：

函数的定义域为（0，+∞），

函数的导数 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，因为分母恒为正，所以我们只需要讨论分子，故：

设 $g(x)=x^2-ax+1$，（显然这是一个一次项系数为参数的二次函数，肯定是结合其判别式以及增减区间去讨论其正负）

当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)>0$ 恒成立，即 $f'(x)<0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在（0，+∞）上是减函数，

当 $a>0$ 时，判别式 $\triangle=a^2-4$，

①当 $0<a\leqslant 2$ 时，$\triangle\leqslant 0$，即 $g(x)\geqslant 0$，即 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在（0，+∞）上是减函数，

②当 $a>2$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$	$\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$	$(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$	$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$	$(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	递减		递增		递减

综上当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递减，

当 $a>2$ 时，在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$，和 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递减，

则 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增.

（2）注意：通常来说一题多问的题目，前几问的结论可以当作后几问的已知来用

利用**本质教育第一招翻译**：$f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，结合第一问的结论，知：

$a>2$

并且，由第一问的解答过程知：x_1，x_2 是方程x^2-ax+1的两根，

不妨设：$x_1>x_2>0$（定义域为$x>0$）

故有：$x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$

接下来先化简一下目标不等式：

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(\frac{1}{x_1}-x_1+alnx_1\right)-(\frac{1}{x_2}-x_2+alnx_2)}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}-(x_1-x_2)+a(lnx_1-lnx_2)}{x_1-x_2}$$

$$=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$$

故$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $-2+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}<a-2$

所以目标不等式等价于：$\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}<1$

那此时，利用本质教育第三招盯住目标，不等号的左边立马联想到对数平均不等式，

那么由对数平均不等式：$\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2}>\sqrt{x_1x_2}$（考试时在题目开头最好证明一下）

联系目标，变形为：$\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}<\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$，

因为$\sqrt{x_1x_2}=1$，

则$\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}<1$，得证。

定理 14：对数平均不等式：若$x_1 > x_2 > 0$，则 $\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2} > \sqrt{x_1x_2}$

李泽宇数学(初中/高中)

培养 数学家思维，真正学好数学

本质教育创始人,原香港汇丰联席总监

亲自授课

免费试听 2 小时互动直播课

（每周少量名额扫码加助教预约）

"高中"课程(保130分*)

3到4个月

提高班： 从100分提高到130+, 140+

基础班： 平均分从50.4 提高到 101.9

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课

"初中"课程(保130*150分制)

数学三招： 灵活学习数学思维培养

费曼学习法： 基础知识巩固

趣味化课堂： 培养学生学习兴趣和信心

*未达目标有效期内免费无限次上录播课+直播课